Projektowanie układów prętowych

Zadania wytrzymałości materiałów można podzielić na dwie grupy. Pierwsza z nich, to zadania z zakresu analizy konstrukcji. Dotyczą one wyznaczania naprężeń i odkształceń istniejącej konstrukcji z zależności

$$\sigma = \frac{F}{A}, \qquad \Delta l = \frac{Fl}{EA}.$$

Jeśli podany jest materiał, z jakiego wykonana jest konstrukcja, można wyznaczyć współczynnik bezpieczeństwa

$$\sigma \leq \sigma_{dop} \;\rightarrow\; \frac{F}{A} = \frac{R_e}{n_e} \;\rightarrow\; n_e = \frac{R_e A}{F}.$$

Druga grupa zadań, to zadania o charakterze projektowym. Mając dane dotyczące obciążeń i materiału, dobiera się parametry geometryczne konstrukcji. Punktem wyjścia są tu warunki wytrzymałościowy i sztywnościowy

$$\sigma \leq \sigma_{dop}, \qquad \Delta l \leq \Delta l_{dop}.$$

Dla czystego rozciągania i ściskania przyjmują one postać

$$\frac{F}{A} \leq \frac{R_e}{n_e}, \qquad \frac{Fl}{EA} \leq \Delta l_{dop}.$$

W zależności od sformułowania zadania z powyższych nierówności wyznaczamy szukaną wielkość. Jeśli jest nią pole przekroju poprzecznego, to mamy:

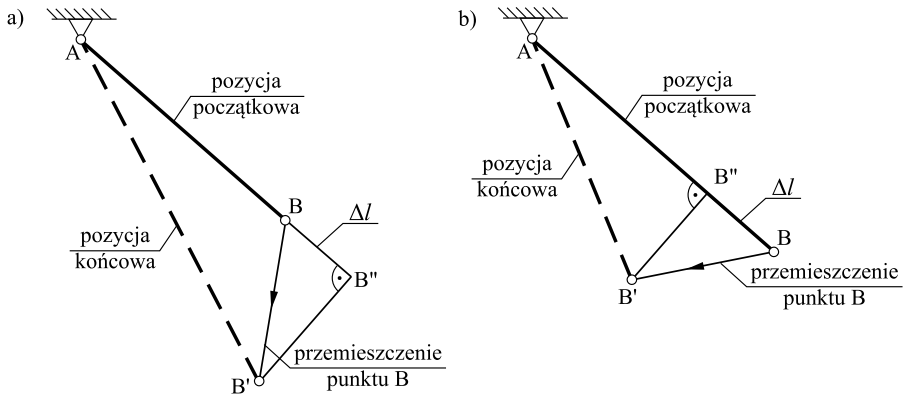
$$A \geq \frac{n_e F}{R_e}, \qquad A \geq \frac{Fl}{\Delta l_{dop} E}.$$

Jeśli przekrój poprzeczny jest okręgiem, to $A = (\pi d^2)/4$, a powyższe nierówności przyjmują postać

$$d \geq \sqrt{\frac{4 n_e F}{\pi R_e}}, \qquad d \geq \sqrt{\frac{4Fl}{\pi \Delta l_{dop} E}}.$$

Formuły te pozwalają wyznaczyć minimalną średnicę pręta, spełniającego warunki wytrzymałościowy i sztywnościowy.

Przy analizie deformacji układów prętowych przyjmuje się, że kąty między poszczególnymi prętami nie zmieniają się a przemieszczenia są małe. W konsekwencji przemieszczenia punków opisuje się w sposób przedstawiony na Rys. 1.



Rys. 1: Analiza przemieszczeń punków pręta: a) rozciąganego; b) ściskanego

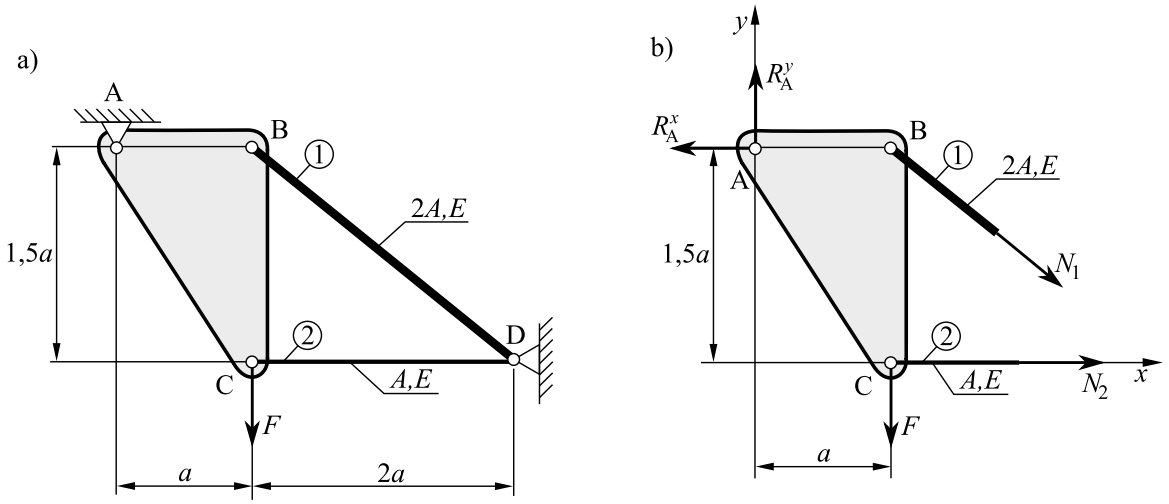
W przypadku pręta rozciąganego punkt B przemieszcza się wzdłuż osi pręta o wartość równą wydłużeniu Δl, a następnie przemieszcza się po prostej prostopadłej do osi pręta („obrót" wokół punktu A). Natomiast w przypadku pręta ściskanego punk B przemieszcza się wzdłuż osi pręta o wartość równą skróceniu Δl, a następnie przemieszcza się po prostej prostopadłej do osi pręta („obrót" wokół punktu A).

© *Paweł Jasion, Poznań 2026*

Układ pręty-ciało sztywne

Przykład

Ciało sztywne ABC podparte jest przegubowo w punkcie A. Ponadto wspierane jest prętami 1 i 2. Obciążenie w postaci siły skupionej F przyłożone jest w punkcie C. Wyznaczyć siły i naprężenia w prętach 1 i 2 oraz przemieszczenie punktu C (Rys. 2a).



Rys. 2: Układ pręt-ciało sztywne; statycznie niewyznaczalny

Aby wyznaczyć siły w prętach, przecinamy je, a na przekrojach wprowadzamy siły wewnętrzne N_1 i N_2. Ponadto uwalniamy układ od więzów. Układ taki przedstawiony jest na Rys. 2b. Zadanie jest jednokrotnie statycznie niewyznaczalne – mamy cztery niewiadome: dwie siły wewnętrzne i dwie reakcje w punkcie A. Zgodnie z zasadami statyki, dla płaskiego układu sił możemy zapisać tylko trzy niezależne równania równowagi. Będziemy więc potrzebowali dodatkowego równania, które można otrzymać z analizy przemieszczeń konstrukcji.

Obliczenia zaczynamy od zapisania równania równowagi, które powiąże obciążenie z siłami wewnętrznymi. Będzie to suma momentów względem punktu A

$$\sum M_A = Fa + \frac{3}{5}aN_1 - \frac{3}{2}aN_2 = 0 \quad \text{stąd} \quad \frac{3}{2}N_2 - \frac{3}{5}N_1 = F \tag{1}$$

Równanie geometryczne otrzymamy zauważając, że każdy punkt ciała sztywnego obraca się wokół punktu A proporcjonalnie do jego odległości od tego punktu. Zatem, zgodnie z Rys. 3, prawdziwa jest zależność

$$\frac{BB'}{AB} = \frac{CC'}{AC} \;\rightarrow\; \frac{BB'}{a} = \frac{2CC'}{\sqrt{13}a} \;\rightarrow\; CC' = \frac{\sqrt{13}}{2}BB' \tag{2}$$

Pozostaje jedynie powiązać przemieszczenia BB' oraz CC' z wydłużeniem (skróceniem) prętów Δl_1 oraz Δl_2.

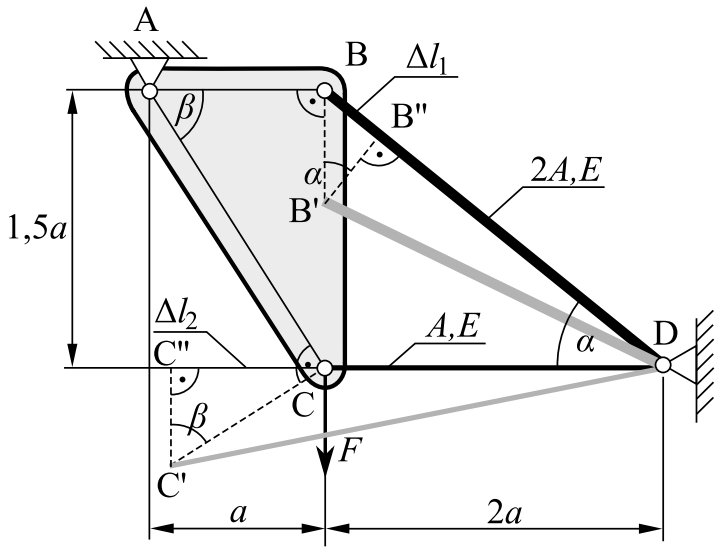
Z trójkątów BB'B" oraz BCD mamy

$$\sin\alpha = \frac{\Delta l_1}{BB'} \quad \text{oraz} \quad \sin\alpha = \frac{3}{5} \quad \text{zatem} \quad BB' = \frac{5}{3}\Delta l_1$$

Z trójkątów CC'C" oraz ABC mamy

$$\sin\beta = \frac{\Delta l_2}{CC'} \quad \text{oraz} \quad \sin\beta = \frac{3}{\sqrt{13}} \quad \text{zatem} \quad CC' = \frac{\sqrt{13}}{3}\Delta l_2$$

© *Paweł Jasion, Poznań 2026*



Rys. 3: Analiza przemieszczeń punktów układu

Podstawiając powyższe do (2) mamy

$$\Delta l_2 = \frac{5}{2}\Delta l_1 \tag{3}$$

Wydłużenie (skrócenie) poszczególnych prętów można wyznaczyć z prawa Hooke'a

$$\Delta l_1 = -\frac{N_1 l_1}{EA_1} = -\frac{5}{4}\frac{N_1 a}{EA} \quad \Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{EA_2} = 2\frac{N_2 a}{EA}$$

Równanie geometryczne przyjmuje zatem postać

$$N_2 = -\frac{25}{16}N_1 \tag{4}$$

Równania (1) i (4) tworzą układ, pozwalający wyznaczyć siły w prętach

$$N_1 = -0,34F, \quad N_2 = 0,53F$$

Mając siły w prętach możemy wyznaczyć naprężenia

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = -\frac{0,34F}{2A} = -0,17\frac{F}{A} \quad \sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{0,53F}{A} = 0,53\frac{F}{A}$$

Przemieszczenie CC' wyznaczymy z wyprowadzonej wcześniej zależności

$$CC' = \frac{\sqrt{13}}{3}\Delta l_2$$

Z poprzednich wyliczeń mamy

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 2a}{AE} \quad \text{oraz} \quad N_2 = 0,53F$$

zatem

$$CC' = \frac{\sqrt{13}}{3}\frac{N_2 2a}{AE} = \frac{\sqrt{13}}{3}\frac{2a}{AE}0,53F = 1,27\frac{Fa}{EA}$$