

Analiza Wytrzymałościowa Konstrukcji Mechanicznych

Analiza konstrukcji powłokowych

dr hab. inż. Paweł JASION

e-mail: `pawel.jasion@put.poznan.pl`

www: `pawel.jasion.pracownik.put.poznan.pl`

Politechnika Poznańska
Instytut Mechaniki Stosowanej
Zakład Wytrzymałości Materiałów i Konstrukcji

- 1 Zastosowania powłok
- 2 Definicja powłoki i analiza konstrukcji powłokowych
- 3 Teoria błonowa
 - Błonowy stan naprężeń
 - Zastosowania teorii błonowej
- 4 Aktualne problemy w analizie konstrukcji powłokowych
- 5 Przykładowa analiza konstrukcji powłokowej

Plan wykładu

- 1 Zastosowania powłok
- 2 Definicja powłoki i analiza konstrukcji powłokowych
- 3 Teoria błonowa
 - Błonowy stan naprężeń
 - Zastosowania teorii błonowej
- 4 Aktualne problemy w analizie konstrukcji powłokowych
- 5 Przykładowa analiza konstrukcji powłokowej

Zastosowania powłok



- różnorodność
 - kształtów
 - zastosowań
 - zachowań

Zastosowania powłok

Szerokie zastosowanie powłok wynika z ich zalet, takich jak:

- efektywne przenoszenie obciążeń
- duży wskaźnik wytrzymałości do masy
- duża sztywność
- wydzielanie dużych przestrzeni
- estetyka

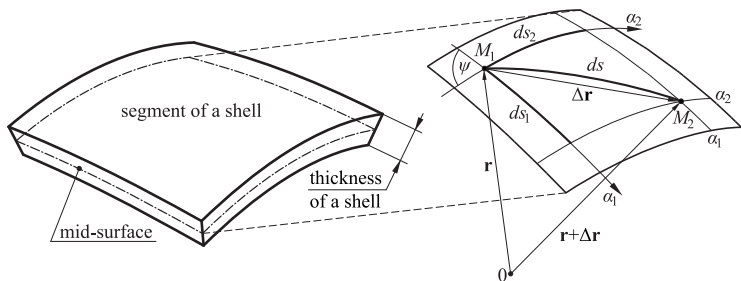
Plan wykładu

- 1 Zastosowania powłok
- 2 Definicja powłoki i analiza konstrukcji powłokowych
- 3 Teoria błonowa
 - Błonowy stan naprężeń
 - Zastosowania teorii błonowej
- 4 Aktualne problemy w analizie konstrukcji powłokowych
- 5 Przykładowa analiza konstrukcji powłokowej

Definicja powłoki

Powłoka

element konstrukcyjny, ograniczony dwoma powierzchniami, którego grubość jest dużo mniejsza niż dwa pozostałe wymiary



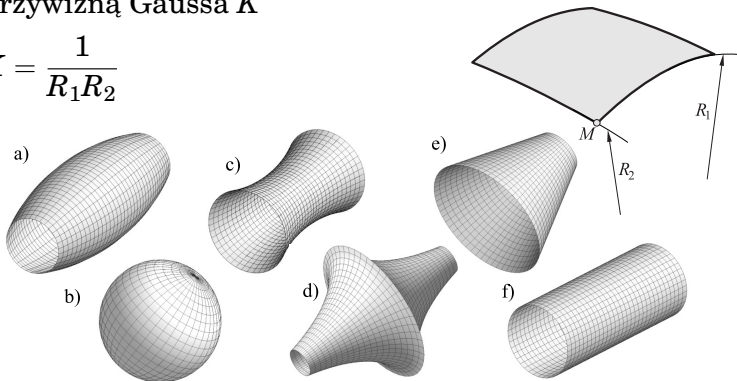
Definicja powłoki

- w zależności od grubości, powłoki możemy podzielić na:
 - powłoki cienkie, dla których $(t/R)_{max} < 1/20$
 - powłoki grube, dla których $(t/R)_{max} > 1/20$
- w powyższych zależnościach t jest największą grubością powłoki, a R najmniejszym promieniem krzywizny

Definicja powłoki

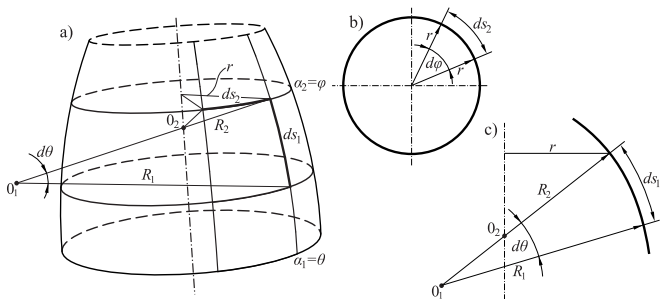
- najczęściej stosowanym typem powłoki jest powłoka obrotowa
- w zależności od geometrii można wyróżnić powłoki z dodatnią, ujemną lub zerową krzywizną Gaussa K

$$K = \frac{1}{R_1 R_2}$$



Definicja powłoki

- geometria powłoki obrotowej definiowana jest przez dwa główne promienie krzywizny: południkowy R_1 i obwodowy R_2



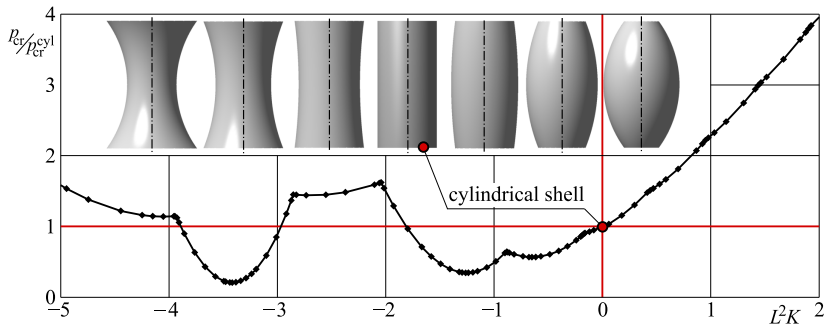
- zależność różniczkowa:
$$\frac{d(R_2 \sin \theta)}{d\theta} = R_1 \cos \theta$$

Mechanizm przenoszenia obciążeń

- powłoka przenosi obciążenie poprzeczne głównie poprzez naprężenia rozciągające i ściskające – **naprężenia błonowe**
- są one równomiernie rozłożone na grubości powłoki; taki stan naprężenia nazywa się **błonowym stanem naprężeń**
- zaletą stanu błonowego jest to, że:
 - pozwala w pełni wykorzystać właściwości mechaniczne materiału – przy czystym rozciąganiu wszystkie włókna na przekroju są tak samo wyęczone
 - przy zadanej wartości obciążenia naprężenia błonowe są zawsze mniejsze niż gnące

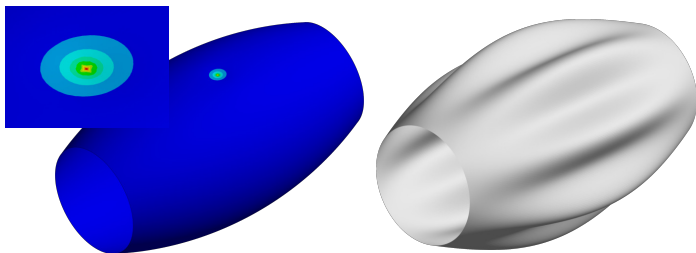
Mechanizm przenoszenia obciążeń

- efektywność powłoki jako elementu konstrukcyjnego związana jest z jej **krzywizną** i **cienkościennością**
- dzięki krzywiznie powłoka zyskuje sztywność przestrzenną, a obciążenie rozkładane jest na siły błonowe



Mechanizm przenoszenia obciążeń

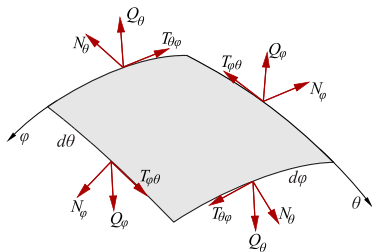
- dzięki cienkościenności powłoka zyskuje lekkość, a pojawiające się lokalnie naprężenia zginające szybko zanikają
- wadą cienkościenności jest to, że w przypadku naprężeń błonowych ściskających, powłoka może ulec wyboczeniu



Siły wewnętrzne i deformacja

Głównym obciążeniem przenoszonym przez konstrukcje powłokowe są siły poprzeczne w postaci ciśnienia Siłami wewnętrznymi, pojawiającymi się w powłoce i wywołującymi jej deformację to

- siły normalne – rozciągające i ściskające
- siły styczne – siły w płaszczyźnie oraz siły poprzeczne
- momenty gnące
- momenty skręcające



Plan wykładu

- 1 Zastosowania powłok
- 2 Definicja powłoki i analiza konstrukcji powłokowych
- 3 Teoria błonowa**
 - Błonowy stan naprężeń
 - Zastosowania teorii błonowej
- 4 Aktualne problemy w analizie konstrukcji powłokowych
- 5 Przykładowa analiza konstrukcji powłokowej

Uproszczenia

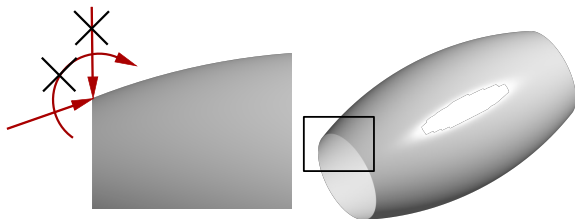
- dla uproszczenia obliczeń zakłada się, że całe obciążenie przenoszone jest przez siły błonowe, działające w płaszczyźnie powłoki
- podejście takie nazywane jest teorią błonową
- można ją stosować dla tych części powłoki, które znajdują się w znacznej odległości od punktów podparcia, punktowego obciążenia lub lokalnej zmiany grubości



Ograniczenia w stosowaniu teorii błonowej

Aby można było zastosować teorię błonową, muszą być spełnione następujące warunki:

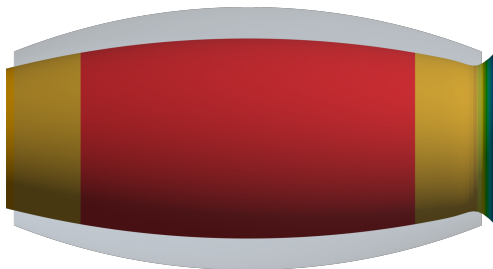
- krawędzie powłoki są wolne od poprzecznych sił tnących i momentów; obciążenia przyłożone do krawędzi powłoki muszą leżeć w płaszczyźnie stycznej do powierzchni środkowej,



Ograniczenia w stosowaniu teorii błonowej

Aby można było zastosować teorię błonową, muszą być spełnione następujące warunki:

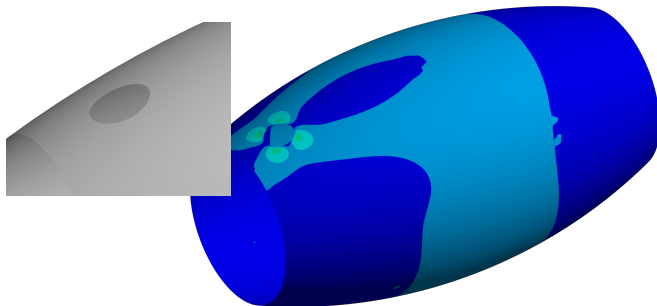
- przemieszczenia normalne i obroty na krawędzi powłoki są dozwolone; oznacza to, że krawędzie mogą się swobodnie przemieszczać w kierunku normalnym do powierzchni środkowej,



Ograniczenia w stosowaniu teorii błonowej

Aby można było zastosować teorię błonową, muszą być spełnione następujące warunki:

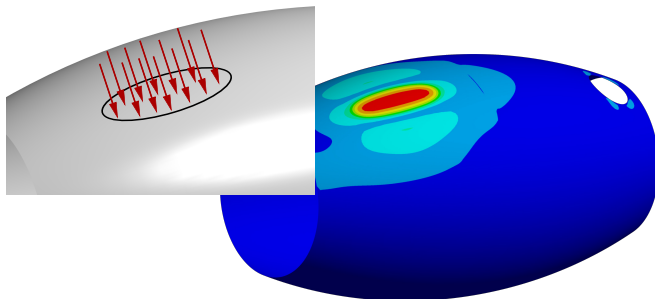
- powierzchnia powłoki musi być gładka i ciągła,



Ograniczenia w stosowaniu teorii błonowej

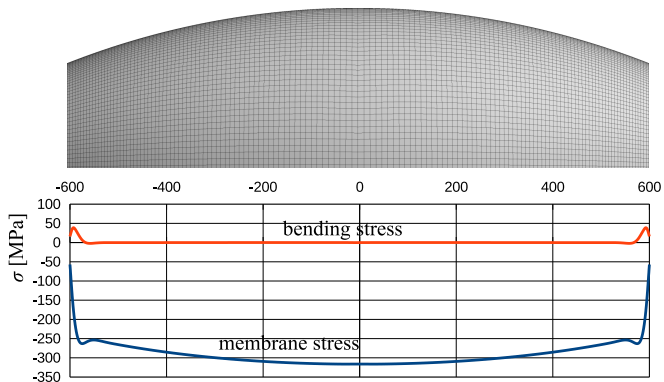
Aby można było zastosować teorię błonową, muszą być spełnione następujące warunki:

- składowe obciążające powierzchnię i krawędzie muszą być gładkimi i ciągłymi funkcjami współrzędnych.



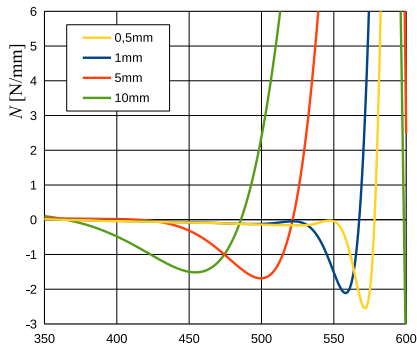
Ograniczenia w stosowaniu teorii błonowej

- niespełnienie któregokolwiek z powyższych warunków sprawia, że w powłoce pojawią się naprężenia gnące



Ograniczenia w stosowaniu teorii błonowej

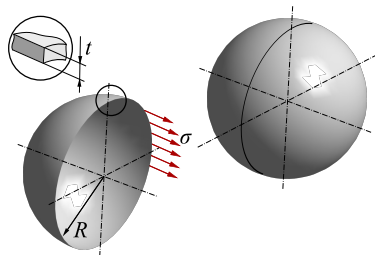
- projektując zbiornik należy unikać pojawienia się naprężeń gnących lub dążyć do ich minimalizacji
- naprężenia gnące maleją szybko w miarę oddalania się od ich źródła; im cieńsza powłoka, tym zanikanie jest szybsze



Proste przypadki

Powłoka sferyczna

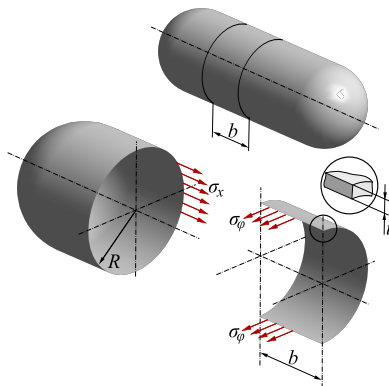
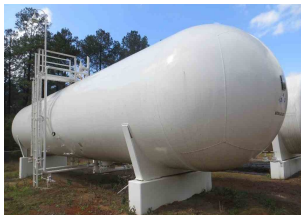
- przeanalizujemy rozkład naprężeń w powłoce sferycznej o promieniu R i grubości t obciążonej wewnętrznym ciśnieniem p



Proste przypadki

Powłoka walcowa

- przeanalizujemy rozkład naprężeń w powłoce walcowej o promieniu R i grubości t obciążonej wewnętrznym ciśnieniem p



Proste przypadki

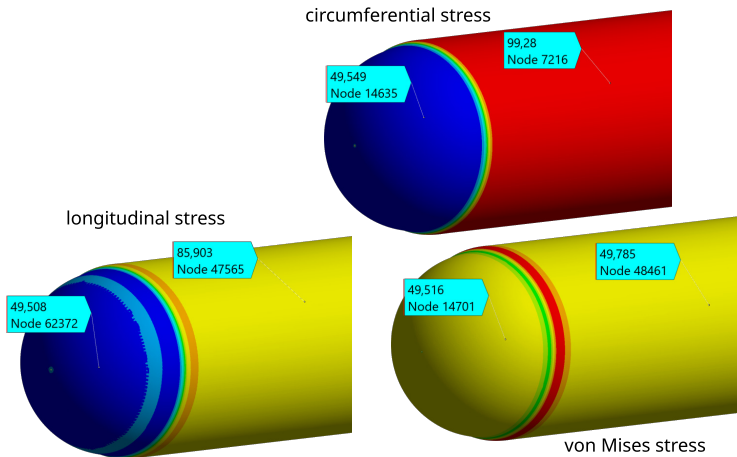
Stosując teorię błonową, obliczyć naprężenia główne oraz zredukowane dla zbiornika walcowego zamkniętego dnami półsferycznymi.

Zadane parametry:

- promień zbiornika: $R = 500$ mm,
- grubość ścianki zbiornika: $t = 5$ mm,
- długość zbiornika: $L = 6000$ mm,
- wewnętrzne ciśnienie obciążające: $p = 1$ MPa.

Proste przypadki

Przykład 1 – rozwiązanie MES

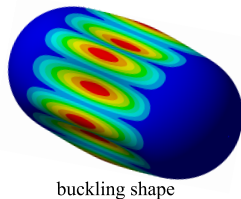
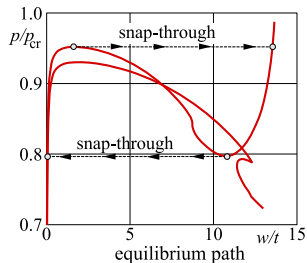
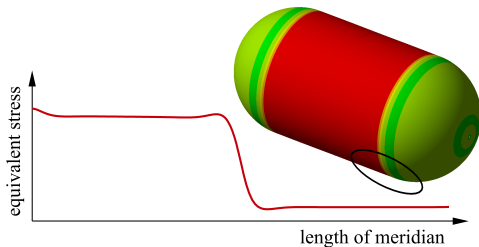


Plan wykładu

- 1 Zastosowania powłok
- 2 Definicja powłoki i analiza konstrukcji powłokowych
- 3 Teoria błonowa
 - Błonowy stan naprężeń
 - Zastosowania teorii błonowej
- 4 Aktualne problemy w analizie konstrukcji powłokowych**
- 5 Przykładowa analiza konstrukcji powłokowej

Wady klasycznych zbiorników walcowych

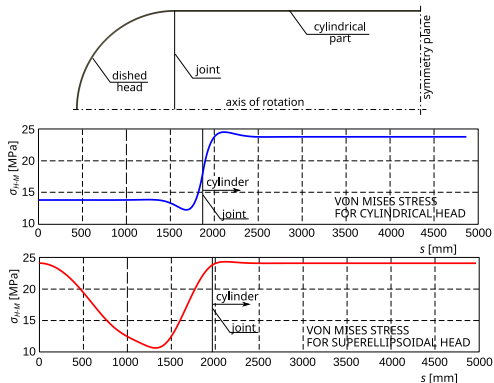
- efekt brzegowy
- podatna część walcowa
- niestabilna ścieżka równowagi



Problemy badawcze

Cele badań nad konstrukcjami powłokowymi to:

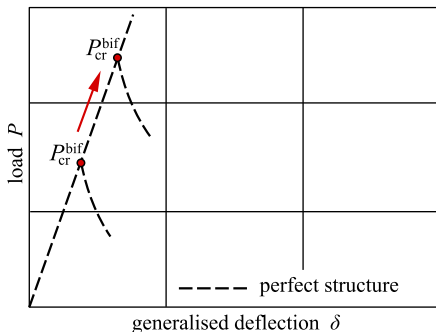
- otrzymanie gładkiego rozkładu naprężeń wzdłuż południka,



Problemy badawcze

Cele badań nad konstrukcjami powłokowymi to:

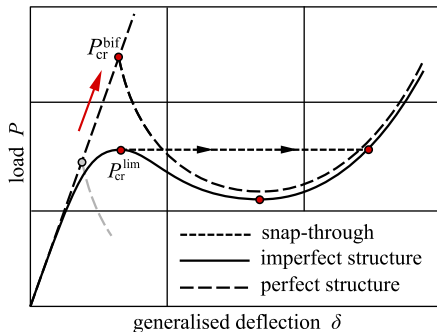
- zwiększenie wartości obciążenia krytycznego –
usztynwienie lub zastąpienie walcowej części powłoki



Problemy badawcze

Cele badań nad konstrukcjami powłokowymi to:

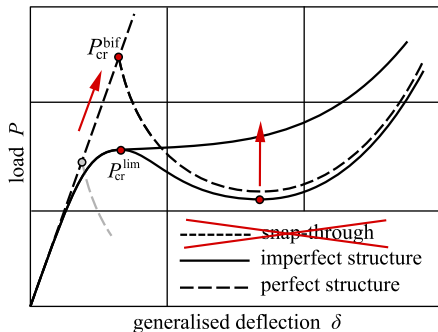
- stabilizacja zachowania pokrytycznego,



Problemy badawcze

Cele badań nad konstrukcjami powłokowymi to:

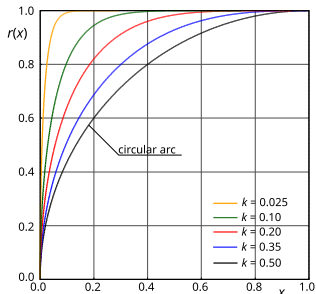
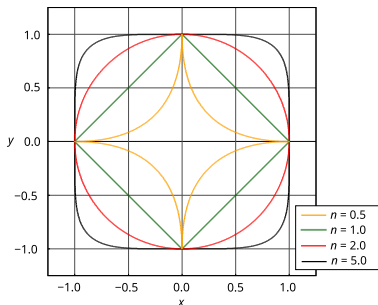
- stabilizacja zachowania pokrytycznego.



Istniejące rozwiązania

Efekt brzegowy można wyeliminować poprzez:

- **zmianę kształtu południka**
 - zmiana kształtu dna zbiornika walcowego

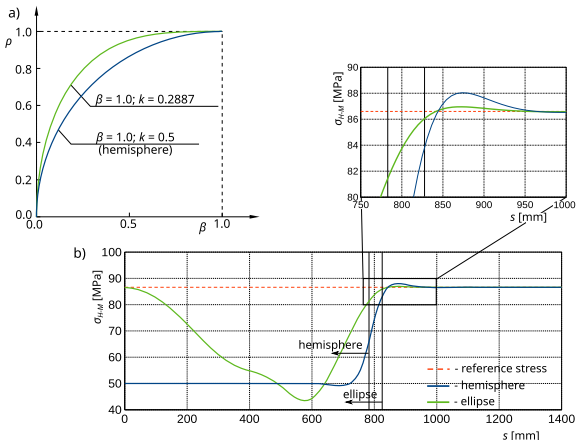


$$\left| \frac{x}{a} \right|^n + \left| \frac{y}{b} \right|^n = 1$$

Istniejące rozwiązania

Efekt brzegowy można wyeliminować poprzez:

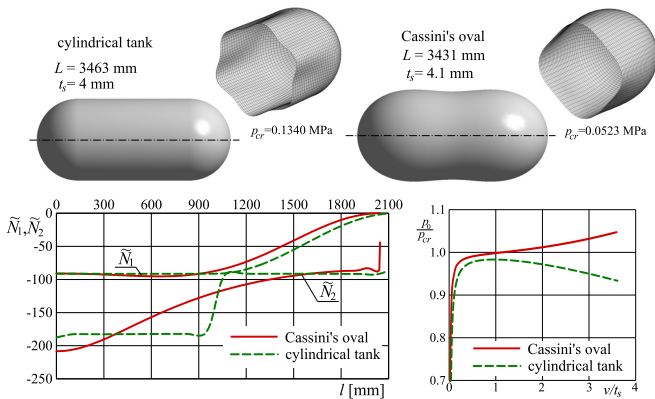
- **zmianę kształtu południka**
 - zmiana kształtu dna zbiornika walcowego



Istniejące rozwiązania

Efekt brzegowy można wyeliminować poprzez:

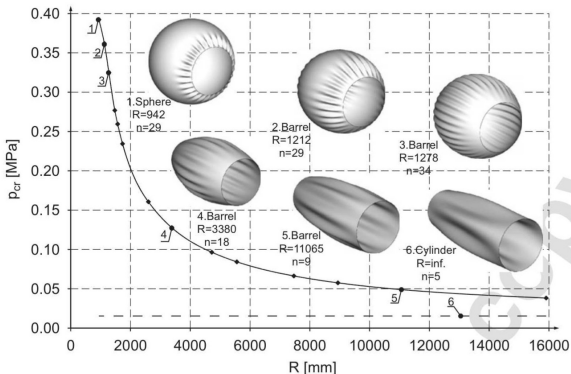
- **zmianę kształtu południka**
- zmiana kształtu zbiornika



Istniejące rozwiązania

Obciążenie krytyczne można zwiększyć poprzez:

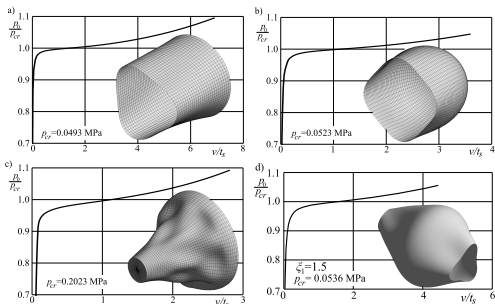
- zwiększenie grubości powłoki,
- wprowadzenie żeber usztywniających,
- **zmianę kształtu południka.**



Istniejące rozwiązania

Stabilizację zachowania pokrytycznego można osiągnąć poprzez:

- wprowadzenie żeber usztywniających lub dodatkowych podpór
- zastosowanie wstępnego napięcia,
- **zmianę kształtu południka.**



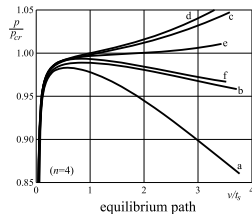
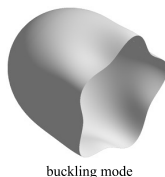
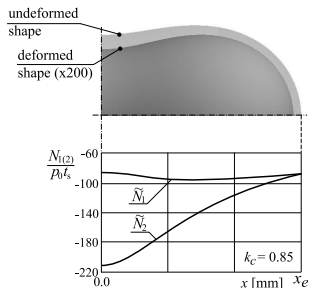
Plan wykładu

- 1 Zastosowania powłok
- 2 Definicja powłoki i analiza konstrukcji powłokowych
- 3 Teoria błonowa
 - Błonowy stan naprężeń
 - Zastosowania teorii błonowej
- 4 Aktualne problemy w analizie konstrukcji powłokowych
- 5 Przykładowa analiza konstrukcji powłokowej

Kompleksowa analiza konstrukcji powłokowych

Pełna analiza konstrukcji powłokowej powinna zawierać:

- analiza dokrytyczna – naprężenia i deformacja
- liniowa analiza stateczności – obciążenie krytyczne i postać wyboczenia
- analiza pokrytyczna – ścieżka równowagi



Geometria owalu Cassiniego

- równanie krzywej: $(x^2 + y^2)^2 - 2c^2(x^2 - y^2) - a^4 + c^4 = 0$
- określona przez punkty: $r_1 \times r_2 = a^2$



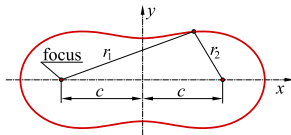
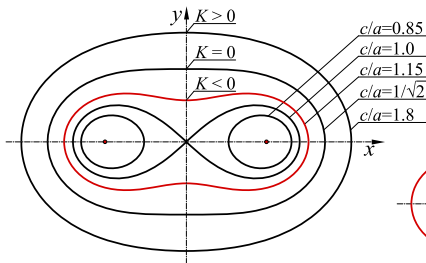
cocoon of silkworm



red blood cell



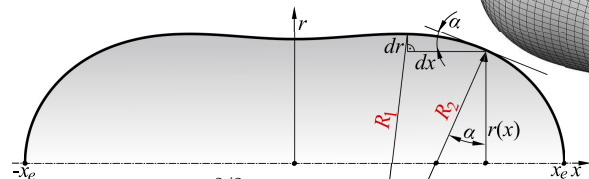
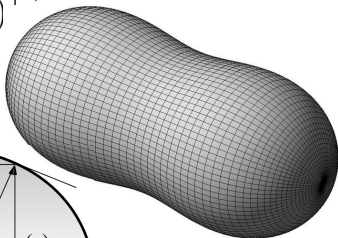
Giovanni Domenico Cassini



Geometria owalu Cassiniego

- równanie krzywej:

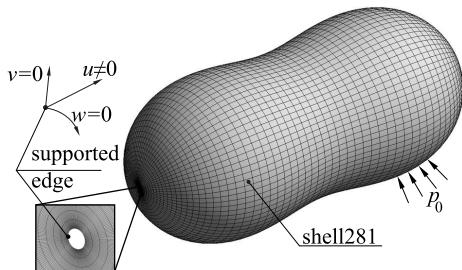
$$r(x) = \left[\sqrt{4c^2x^2 + a^2} - (c^2 + x^2) \right]^{1/2}$$



$$R_1 = - \frac{\left[1 + \left(\frac{dr}{dx} \right)^2 \right]^{3/2}}{\frac{d^2r}{dx^2}}$$

$$R_2 = \left[1 + \left(\frac{dr}{dx} \right)^2 \right]^{1/2} r(x)$$

Model MES



Założenia:

- $V = 5 \text{ m}^3$
- $m = 500 \text{ kg}$

Materiał:

- $E = 200000 \text{ MPa}$
- $\nu = 0.3$

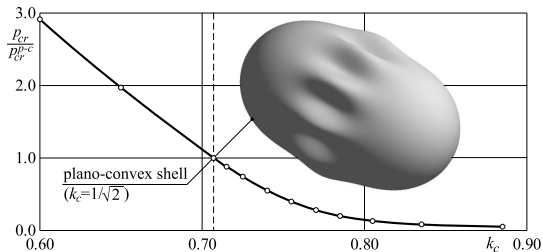
Element skończony

- element powłokowy
- 8 węzłów
- 6 stopni swobody

Wyniki analizy dla owalu Cassiniego

Wpływ krzywizny środkowej części powłoki na wartość obciążenia krytycznego

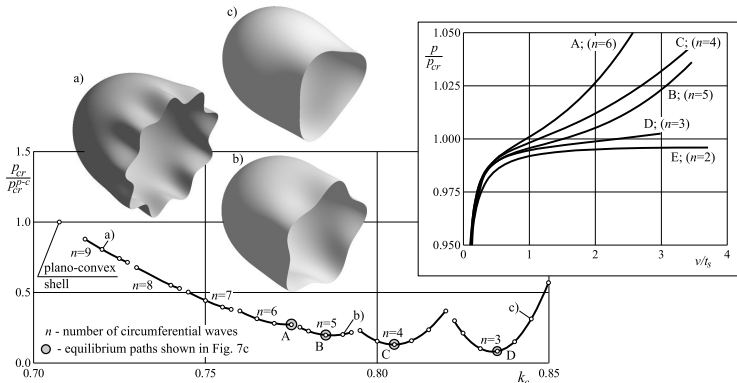
- zwiększenie krzywizny dodatniej podnosi wartość obciążenia krytycznego
- zwiększenie krzywizny ujemnej obniża wartość obciążenia krytycznego



Wyniki analizy dla owalu Cassiniego

Ścieżki równowagi dla wybranych powłok

- dla powłok o pewnej krzywiznie ścieżki równowagi stabilizują się



- 1 Calladine C.R. *Theory of shell structures*, Cambridge University Press, Cambridge, 2007
- 2 Flügge W. *Stresses in shells*, Springer, 1973
- 3 Magnucki K. *Wytrzymałość i optymalizacja zbiorników cienkościennych*, PWN, Warszawa, 1998
- 4 Ziółko J. *Zbiorniki metalowe na ciecze i gazy*, Arkady, Warszawa, 2013