

# Wytrzymałość Materiałów II

## Wytrzymałość w zakresie sprężysto-plastycznym

opracował:

**dr hab. inż. Paweł JASION**

e-mail: `pawel.jasion@put.poznan.pl`

www: `pawel.jasion.pracownik.put.poznan.pl`

**Politechnika Poznańska**  
**Instytut Mechaniki Stosowanej**  
**Zakład Wytrzymałości Materiałów i Konstrukcji**

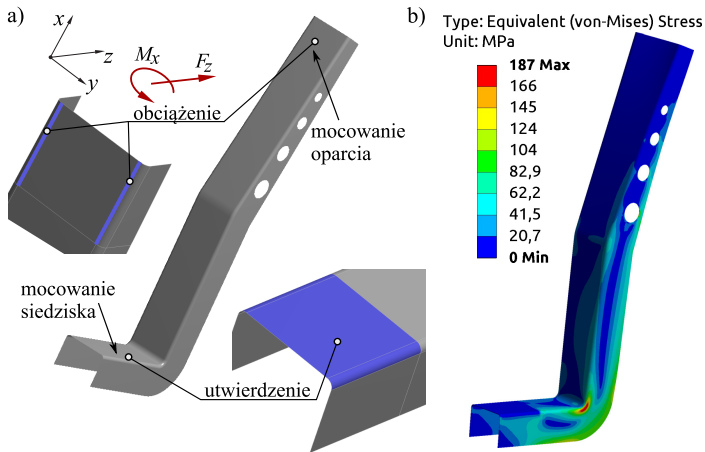
- 1 Pełna analiza konstrukcji
- 2 Podstawowe pojęcia
  - Założenia
  - Materiał sprężysto-plastyczny
  - Analiza konstrukcji w zakresie sprężysto-plastycznym
- 3 Proste przypadki obciążenia
  - Pręty i układy prętowe
  - Skręcanie
  - Zginanie

# Pełna analiza konstrukcji

- w zakresie obciążeń roboczych zależności między obciążeniem a naprężeniami i przemieszczeniami są liniowe
- projektując konstrukcję należy jednak sprawdzić, jak zachowa się ona pod większym obciążeniem
- powinno się również przewidzieć sposób jej zniszczenia
- należy zatem sprawdzić jak zachowa się konstrukcja w obszarze nieliniowym

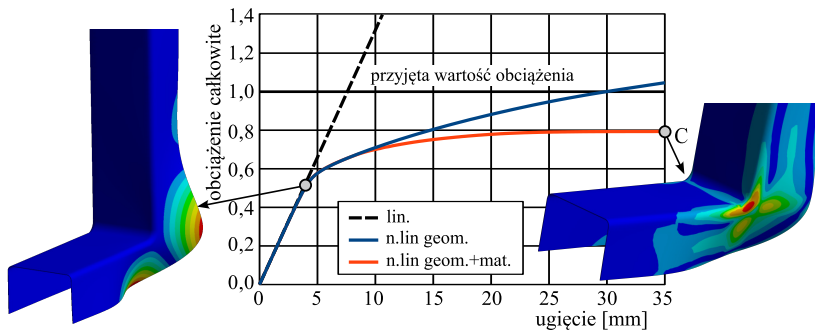
# Pełna analiza konstrukcji

- rozkład naprężeń we wsporniku krzesła biurowego



# Pełna analiza konstrukcji

- ścieżki równowagi dla różnych typów analizy



# Plan wykładu

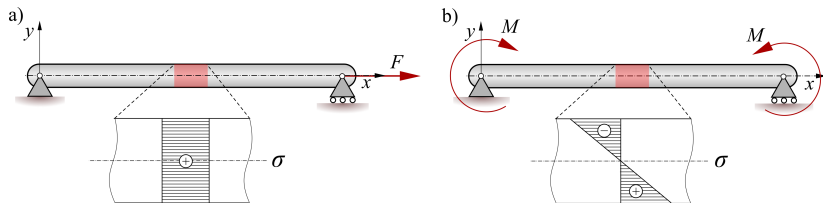
- 1 Pełna analiza konstrukcji
- 2 **Podstawowe pojęcia**
  - **Założenia**
  - Materiał sprężysto-plastyczny
  - Analiza konstrukcji w zakresie sprężysto-plastycznym
- 3 Proste przypadki obciążenia
  - Pręty i układy prętowe
  - Skręcanie
  - Zginanie

# Wytrzymałość a zniszczenie

- konstrukcja traci wytrzymałość, jeśli z powodu częściowego lub całkowitego zniszczenia lub deformacji przestaje spełniać swoją funkcję
- w tym sensie, wytrzymałość jest własnością konstrukcji
- jednak kryterium wytrzymałości związane jest ze stanem naprężeń w punkcie konstrukcji i dlatego opisuje lokalne własności zarówno stanu naprężeń jak i materiału
- oznacza to, że zniszczenie materiału nie musi być jednoznaczne ze zniszczeniem konstrukcji

# Wytrzymałość a zniszczenie

- w przypadku pręta rozciąganego (a) rozkład naprężeń sprawia, że gdy osiągną one granicę plastyczności, pręt uplastycznia się na całym przekroju i ulega zniszczeniu
- w przypadku belki zginanej (b) uplastycznienie przekroju następuje stopniowo, od włókien zewnętrznych w głąb materiału; uplastycznienie zewnętrznych włókien nie musi oznaczać zniszczenia belki

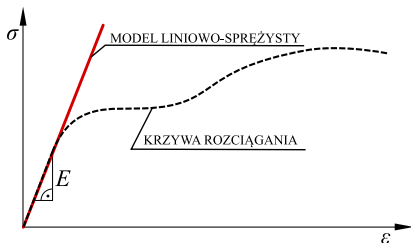


# Plan wykładu

- 1 Pełna analiza konstrukcji
- 2 Podstawowe pojęcia
  - Założenia
  - **Materiał sprężysto-plastyczny**
  - Analiza konstrukcji w zakresie sprężysto-plastycznym
- 3 Proste przypadki obciążenia
  - Pręty i układy prętowe
  - Skręcanie
  - Zginanie

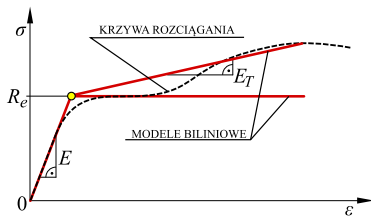
# Modelowanie materiału

- przy analizowaniu konstrukcji w zakresie sprężystym, przyjmuje się liniowo-sprężysty model materiału
- model taki opisany jest dwoma parametrami: modułem Younga  $E$  i współczynnikiem Poissona  $\nu$
- materiał zachowuje się w sposób liniowy niezależnie od wartości naprężeń



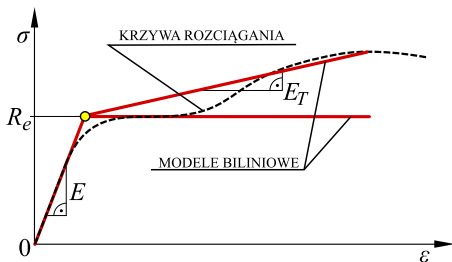
# Modelowanie materiału

- w przypadku analizy konstrukcji z uwzględnieniem jej uplastycznienia należy przyjąć model materiału uwzględniający jego zachowanie się po przekroczeniu granicy plastyczności
- najprostszym modelem jest model biliniowy; wyróżnia się model
  - sprężysto-idealnie plastyczny
  - sprężysto-plastyczny z umocnieniem



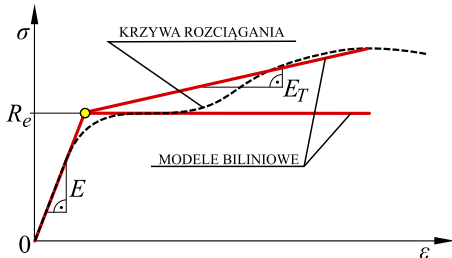
# Modelowanie materiału

- w modelu **sprężysto-idealnie plastycznym** do granicy plastyczności ( $R_e$ ) obowiązuje model liniowo-sprężysty, natomiast po jej przekroczeniu następuje płynięcie materiału, który ma zerową sztywność – wydłużenie wzrasta w nieskończoność przy stałej wartości naprężeń



# Modelowanie materiału

- w modelu **sprężysto-plastycznym z umocnieniem** do granicy plastyczności ( $R_e$ ) obowiązuje model liniowo-sprężysty, natomiast po jej przekroczeniu sztywność materiału zmniejsza się i jest opisywana modułem stycznym  $E^T$ ; druga część wykresu jest też liniowa i modeluje zjawisko umacniania się materiału

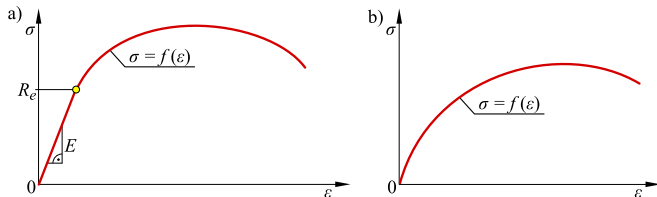


# Modelowanie materiału

- nieliniowe zachowanie materiału można zamodelować dokładniej definiując funkcję  $\sigma = f(\varepsilon)$ , która je opisuje
- jednym z przykładów jest funkcja Ramberga-Osgood'a<sup>1</sup>

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + K \left( \frac{\sigma}{E} \right)^n$$

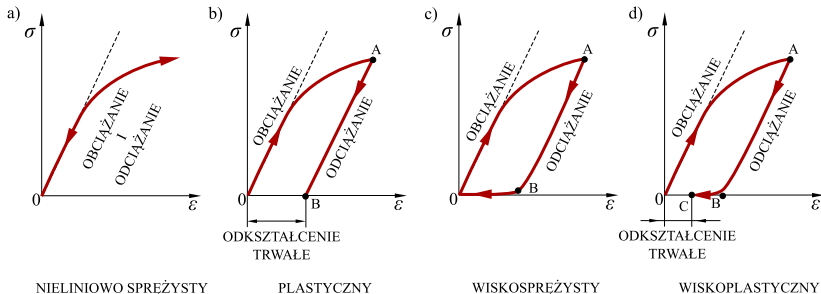
gdzie  $K$  i  $n$  są stałymi zależnymi od materiału



<sup>1</sup>W. Ramberg, W.R. Osgood, NACA-TN-902, 1943

# Modelowanie materiału

W zależności od własności, materiały mogą zachowywać się w różny sposób pod obciążeniem.



# Plan wykładu

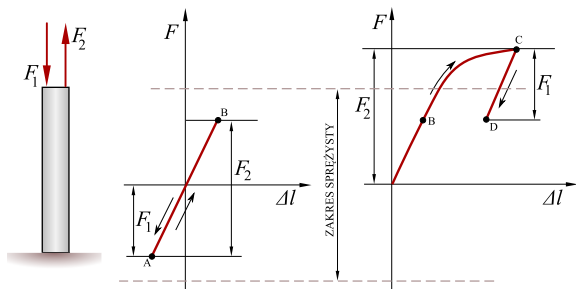
- 1 Pełna analiza konstrukcji
- 2 Podstawowe pojęcia
  - Założenia
  - Materiał sprężysto-plastyczny
  - **Analiza konstrukcji w zakresie sprężysto-plastycznym**
- 3 Proste przypadki obciążenia
  - Pręty i układy prętowe
  - Skręcanie
  - Zginanie

# Analiza konstrukcji

- w przypadku analizy sprężysto-plastycznej nie jest spełniona zasada niezależności przykładania sił
- mówi ona, że kolejność przykładania sił nie wpływa na ostateczny wynik
- na kolejnym slajdzie wyjaśniono to na przykładzie pręta ściskanego siłą  $F_1$  i rozciąganego siłą  $F_2$ , która jest dwa razy większa od siły  $F_1$
- rozpatrzono dwa przypadki: w pierwszym przykładana jest najpierw siła ściskająca  $F_1$  a następnie siła rozciągająca  $F_2$ ; w drugim kolejność jest odwrotna

# Analiza konstrukcji

- jeśli najpierw przyłożą się siłę  $F_1$ , a później  $F_2$ , materiał pręta pozostaje w zakresie sprężystym
- jeśli kolejność jest odwrotna, materiał pod wpływem siły  $F_2$  uplastycznia się, a siła  $F_1$  sprowadza go z powrotem do stanu sprężystego, jednak w materiale pozostają trwałe odkształcenia plastyczne



# Analiza konstrukcji

- analizując konstrukcję w zakresie sprężystym przyjmuje się, że maksymalne odkształcenia nie przekraczają 1%
- w zakresie sprężysto-plastycznym maksymalne odkształcenia nie przekraczają 2%
- dla przykładu: dla stali z granicą plastyczności  $\sigma_{pl} = 240$  MPa odkształcenie uplastyczniające

$$\varepsilon_{pl} = \frac{\sigma_{pl}}{E} \cdot 100\% = \frac{240 \text{ MPa}}{200000 \text{ MPa}} \cdot 100\% = 0,12\%$$

- zatem w obu przypadkach odkształcenia są na tyle małe, że konstrukcję można analizować **w stanie nieodkształconym**

# Analiza konstrukcji

- w praktyce, aby lepiej wykorzystać własności materiału, konstrukcję projektuje się na tzw. nośność graniczną

## Nośność graniczna

wartość obciążenia, powyżej której układ przekształca się w mechanizm na skutek **całkowitego** uplastycznienia **niektórych** przekrojów

- zakładamy przy tym sprężysto-idealnie plastyczny model materiału i rozpatrujemy jedynie początek ruchu

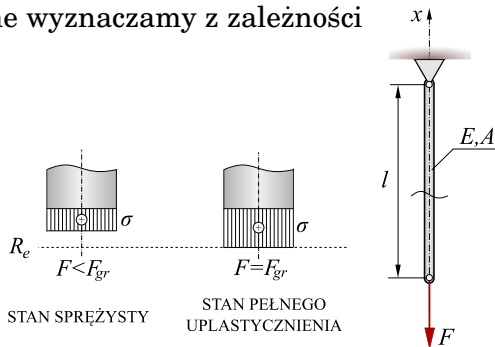
# Plan wykładu

- 1 Pełna analiza konstrukcji
- 2 Podstawowe pojęcia
  - Założenia
  - Materiał sprężysto-plastyczny
  - Analiza konstrukcji w zakresie sprężysto-plastycznym
- 3 Proste przypadki obciążenia
  - Pręty i układy prętowe
  - Skręcanie
  - Zginanie

# Pręt pryzmatyczny

- pręt pryzmatyczny obciążony siłą na końcu osiągnie nośność graniczną, kiedy jego przekrój poprzeczny ulegnie całkowitemu uplastycznieniu
- obciążenie graniczne wyznaczamy z zależności

$$F_{gr} = R_e A$$

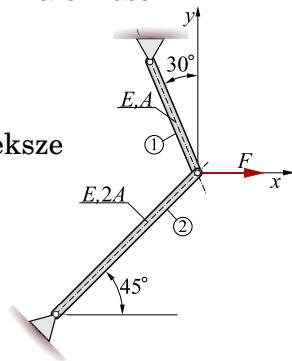
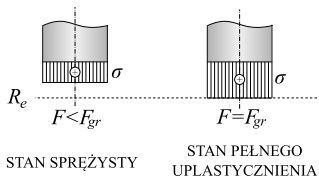


# Układy statycznie wyznaczalne

- statycznie wyznaczalny układ prętów osiągnie nośność graniczną, kiedy przekrój poprzeczny jednego z nich ulegnie całkowitemu uplastycznieniu
- obciążenie graniczne wyznaczamy z zależności

$$F_{gr} = R_e A$$

przy czym należy najpierw ustalić, w którym pręcie **naprężenia** są większe



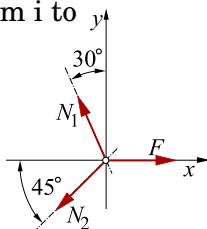
# Układy statycznie wyznaczalne

- dla powyższego przykładu, z równań równowagi wyznaczamy siły wewnętrzne w prętach; mamy  $N_1 = 0,72F$  oraz  $N_2 = 0,9F$
- naprężenia w poszczególnych prętach będą miały wartość

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A} = 0,72 \frac{F}{A} \quad \text{oraz} \quad \sigma_2 = \frac{N_2}{2A} = 0,45 \frac{F}{A}$$

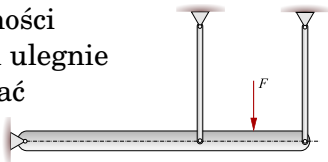
- większe naprężenia są w pręcie pierwszym i to ten pręt uplastyczni się jako pierwszy
- zatem obciążenie graniczne pojawi się, gdy  $\sigma_1 = R_e$ , czyli

$$R_e = 0,72 \frac{F}{A} \rightarrow F_{gr} = 1,39 R_e A$$



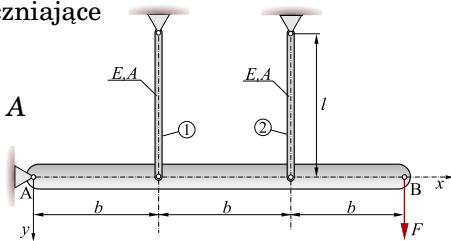
# Układy statycznie niewyznaczalne

- układy statycznie niewyznaczalne tracą nośność stopniowo; uplastycznieniu ulegają kolejne pręty
- poniżej przedstawiono przykład sztywnej belki podpartej na dwóch prętach odkształcalnych
- przy założeniu, że naprężenia w prętach w danej chwili są różne, najpierw uplastyczni się pręt, w którym są one większe; mówimy wtedy o obciążeniu uplastyczniającym
- wtedy, układ belki i jednego pręta odkształcalnego przenosi całe obciążenie; sztywność układu jest mniejsza
- dopiero, gdy naprężenia w drugim pręcie osiągną granicę plastyczności układ zmienia się w mechanizm i ulegnie zniszczeniu; będzie to odpowiadać obciążeniu granicznemu



# Układy statycznie niewyznaczalne

- dla układu sztywnej belki podpartej dwoma prętami o długości  $l$ :
  - wyznaczyć obciążenie uplastyczniające  $F_{pl}$  i odpowiadające mu przemieszczenie punktu B  $v_B$
  - wyznaczyć obciążenie graniczne  $F_{gr}$  i odpowiadające mu przemieszczenie punktu B  $v_B$
  - przedstawić wykres zależności  $F-v_B$
- ponadto przyjąć
  - naprężenia uplastyczniające równe  $R_e$
  - materiał pręta  $E$
  - przekrój poprzeczny  $A$



# Układy statycznie niewyznaczalne

- zadanie jest statycznie niewyznaczalne, zatem oprócz równania równowagi należy przeanalizować deformację układu
- z równania równowagi momentów względem punktu A będzie

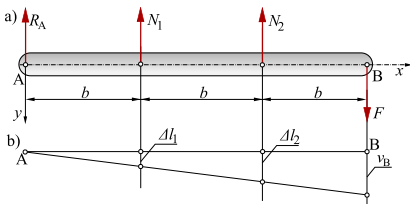
$$N_1 + 2N_2 = 3F$$

- z równania zgodności przemieszczeń mamy

$$\Delta l_2 = 2\Delta l_1$$

- zgodnie z prawem Hooke'a dla rozciągania mamy

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l}{EA} \quad \text{oraz} \quad \Delta l_2 = \frac{N_2 l}{EA}$$



# Układy statycznie niewyznaczalne

- wracając do równania zgodności przemieszczeń otrzymamy  $N_2 = 2N_1$
- a z równania równowagi  $N_1 = \frac{3}{5}F$  oraz  $N_2 = \frac{6}{5}F$
- ponieważ przekroje obu prętów są takie same, większe naprężenia pojawiają się w pręcie, w którym siła wewnętrzna jest większa, czyli w pręcie drugim
- siła uplastyczniająca będzie zatem równa

$$N_2 = R_e A \rightarrow \frac{6}{5}F = R_e A \rightarrow F_{pl} = \frac{5}{6}R_e A$$

- spróbujmy teraz wyznaczyć odpowiadające tej sile przemieszczenie punktu B, czyli  $v_B^{pl}$

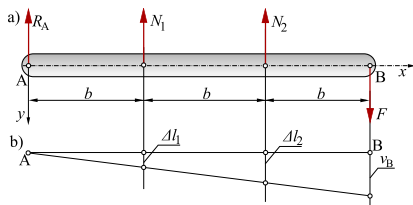
# Układy statycznie niewyznaczalne

- przemieszczenia tego nie możemy wyznaczyć bezpośrednio, ale można je powiązać z wydłużeniem  $\Delta l_2$ , które można wyznaczyć
- z rysunku widać, że

$$\frac{3b}{v_B^{pl}} = \frac{2b}{\Delta l_2}$$

czyli

$$v_B^{pl} = \frac{3}{2} \Delta l_2$$



- w stanie uplastycznienia  $N_2 = R_e A$ , więc wydłużenie pręta drugiego

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 l}{EA} = \frac{R_e l}{E}$$

# Układy statycznie niewyznaczalne

- zatem szukane przemieszczenie punktu B jest równe

$$v_B^{pl} = \frac{3 R_e l}{2 E}$$

- w momencie osiągnięcia przez konstrukcję obciążenia granicznego siła w obu prętach będzie siłą uplastyczniającą  $N_1 = N_2 = R_e A$ ; z równania równowagi mamy zatem

$$N_1 + 2N_2 = 3F \rightarrow R_e A + 2R_e A = 3F \rightarrow F_{gr} = R_e A$$

- w momencie uplastycznienia pręta pierwszego jego wydłużenie będzie równe  $\Delta l_1 = (R_e l)/E$

# Układy statycznie niewyznaczalne

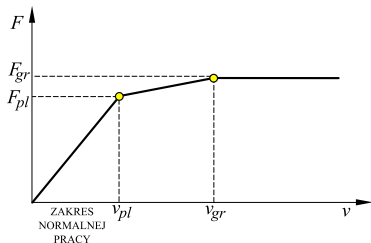
- ponieważ  $v_B = 3\Delta l_1$ , to przemieszczenie punktu B w momencie osiągnięcia przez konstrukcję obciążenia granicznego będzie równe

$$v_B^{pl} = \frac{3R_e l}{E}$$

- z obliczeń wynika, że obciążenie graniczne jest o 20% większe od uplastyczniającego, a przemieszczenie przy obciążeniu granicznym jest dwa razy większe niż przy uplastyczniającym

# Układy statycznie niewyznaczalne

- na wykresie przedstawiającym rozwiązanie widoczne są trzy zakresy:
  - pierwszy, to zakres sprężysty, w którym układ pracuje poprawnie
  - drugi, to zakres, w którym drugi pręt jest uplastyczniony, a całe obciążenie przenoszone jest przez pręt pierwszy – sztywność układu jest mniejsza
  - trzeci, to zakres zniszczenia, w którym układ ma zerową sztywność

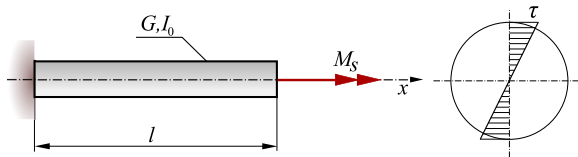


# Plan wykładu

- 1 Pełna analiza konstrukcji
- 2 Podstawowe pojęcia
  - Założenia
  - Materiał sprężysto-plastyczny
  - Analiza konstrukcji w zakresie sprężysto-plastycznym
- 3 Proste przypadki obciążenia
  - Pręty i układy prętowe
  - **Skrećanie**
  - Zginanie

# Skrećanie w zakresie sprężysto-plastycznym

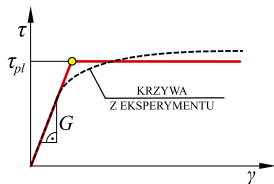
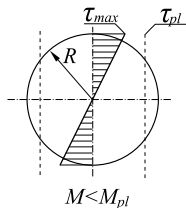
- w przypadku skrećania, analiza w zakresie sprężysto-plastycznym przebiega inaczej niż przy rozciąganiu
- wynika to rozkładu naprężeń na przekroju poprzecznym wału skrećanego
- rozkład ten zmienia się wzdłuż promienia; w osi wału naprężenia są równe zero i wzrastają liniowo aż do wartości maksymalnej na powierzchni zewnętrznej wału



# Skrećanie w zakresie sprężysto-plastycznym

- przyjmujemy model materiału sprężysto-idealnie plastyczny; do naprężeń uplastyczniających  $\tau_{pl}$  zachowuje się on w sposób sprężysty, a po przekroczeniu tej wartości traci zupełnie sztywność, a kąt odkształcenia postaciowego  $\gamma$  rośnie do nieskończoności
- w zakresie sprężystym naprężenia maksymalne, które są mniejsze od uplastyczniających ( $\tau_{max} < \tau_{pl}$ ), wyznaczamy z zależności

$$\tau_{max} = \frac{M}{W_0}$$



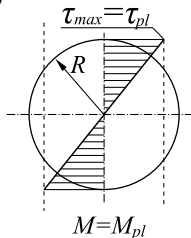
# Skrećanie w zakresie sprężysto-plastycznym

- przy wzroście obciążenia naprężenia rosną aż do wartości uplastyczniającej materiał ( $\tau_{max} = \tau_{pl}$ ) i wtedy wyrażenie na naprężenia możemy zapisać następująco

$$\tau_{max} = \frac{M_{pl}}{W_0} = \tau_{pl}$$

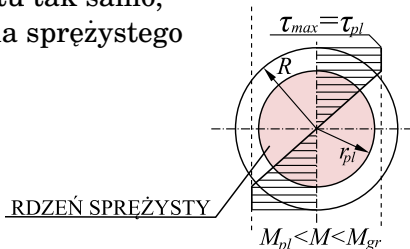
- dla wału pełnego  $W_0 = 0,5\pi R^3$ ; możemy zatem wyznaczyć wartość momentu skręcającego powodującego uplastycznienie zewnętrznych włókien materiału

$$M_{pl} = \frac{1}{2}\pi\tau_{pl}R^3$$



# Skrećanie w zakresie sprężysto-plastycznym

- przy dalszym zwiększaniu obciążenia, kolejne warstwy materiału będą się uplastyczniały
- zewnętrzna część wału, od promienia  $R$  do  $r_{pl}$  będzie w pełni uplastyczniona a naprężenia będą równe  $\tau_{pl}$
- poniżej promienia  $r_{pl}$  materiał wału będzie w stanie sprężystym i będzie stanowił tzw. rdzeń sprężysty; naprężenia wyznacza się tu tak samo, jak w przypadku skrećania sprężystego



# Skrećanie w zakresie sprężysto-plastycznym

- chcąc wyznaczyć wartość momentu skręcającego w stanie sprężysto-plastycznym musimy znaleźć sumę momentów dla obszaru sprężystego  $M_{s-pl}^1$  i plastycznego  $M_{s-pl}^2$
- moment z obszaru sprężystego wyznaczamy typowo, przyjmując promień równy  $r_{pl}$ , na którym zaczyna się uplastycznienie

$$M_{s-pl}^1 = \frac{1}{2} \pi \tau_{pl} r_{pl}^3$$

- moment z obszaru uplastycznionego należy zdefiniować na podstawie poniższego schematu

# Skrećanie w zakresie sprężysto-plastycznym

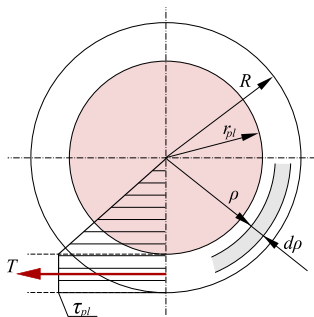
- moment definiuje się jako iloczyn siły i ramienia; w naszym przypadku siła  $T$  generowana jest przez naprężenia  $\tau_{pl}$  na długości od  $r_{pl}$  do  $R$  na ramieniu  $\rho$
- naprężenia rozłożone są na całym obwodzie, zatem obszar, na którym działają to pierścień, który możemy zapisać jako

$$dA = 2\pi\rho d\rho$$

- moment możemy zatem zapisać

$$M_{s-pl}^2 = \int_r^R \tau_{pl} \rho dA$$

$$M_{s-pl}^2 = \frac{2}{3} \pi \tau_{pl} (R^3 - r_{pl}^3)$$



# Skrećanie w zakresie sprężysto-plastycznym

- kąt skrećania w obszarze sprężystym wyznaczamy ze znanej zależności

$$\theta = \frac{M_{s-pl}^1}{GI_0} = \frac{2M_{s-pl}^1}{G\pi r_{pl}^4}$$

- podstawiając za  $M_{s-pl}^1$  wyznaczone wcześniej wyrażenie możemy wyznaczyć promień uplastycznienia

$$r_{pl} = \frac{\tau_{pl}}{\theta G}$$

- widać, że gdy kąt skrećania  $\theta$  dąży do nieskończoności, promień uplastycznienia  $r_{pl}$  dąży do zera, co oznacza uplastycznienie całego przekroju poprzecznego wału

# Skrećanie w zakresie sprężysto-plastycznym

- ostateczne wyrażenie na moment w zakresie sprężysto-plastycznym otrzymamy sumując wyznaczone wyżej składowe i podstawiając do nich wyrażenie na promień uplastycznienia

$$M_{s-pl} = M_{s-pl}^1 + M_{s-pl}^2$$

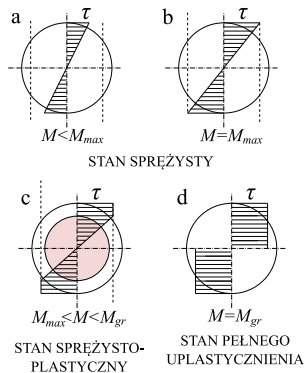
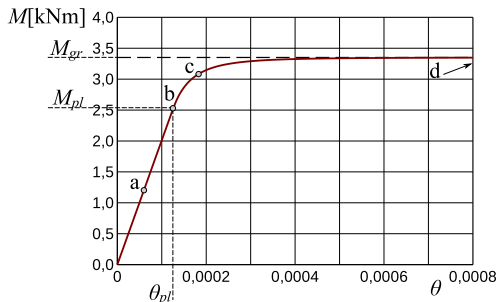
$$M_{s-pl} = \frac{2}{3}\pi\tau_{pl}R^3 - \frac{1}{6}\pi\tau_{pl}\left(\frac{\tau_{pl}}{\theta G}\right)^3$$

- pełne uplastycznienie przekroju jest tożsame z zerową sztywnością wału; wtedy kąt skrećania będzie dążył do nieskończoności; zatem drugi składnik powyższego równania będzie dążył do zera a moment graniczny  $M_{gr}$  możemy zapisać

$$M_{gr} = \frac{2}{3}\pi\tau_{pl}R^3$$

# Skrećanie w zakresie sprężysto-plastycznym

- na podstawie zależności wyprowadzonych wcześniej, dla danych:  $d = 20$  mm,  $G = 80000$  MPa i  $\tau_{pl} = 200$  MPa, sporządzono wykres przedstawiający zależność momentu obciążającego  $M$  od kąta skrećania  $\theta$



# Skrećanie w zakresie sprężysto-plastycznym

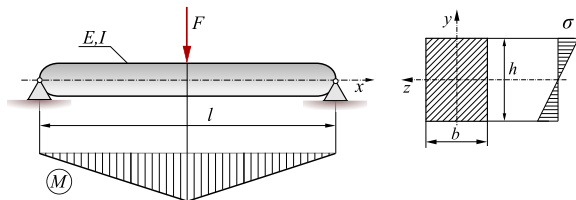
- pełne zniszczenie wału nastąpi wtedy, gdy w każdym punkcie dowolnego przekroju naprężenia osiągną granicę plastyczności; oznacza to pojawienie się przegubu plastycznego, dla którego kąt skrećania rośnie do nieskończoności – sztywność wału jest zerowa
- warto zauważyć, że stosunek momentu granicznego  $M_{gr}$ , równoważnego ze zniszczeniem wału, do momentu uplastycznienia  $M_{pl}$ , przy którym zaczynają uplastyczniać się zewnętrzne włókna, wynosi  $4/3$
- oznacza to, że istnieje zapas wytrzymałości, w postaci 33% momentu uplastycznienia, wynikający z plastycznych właściwości materiału

# Plan wykładu

- 1 Pełna analiza konstrukcji
- 2 Podstawowe pojęcia
  - Założenia
  - Materiał sprężysto-plastyczny
  - Analiza konstrukcji w zakresie sprężysto-plastycznym
- 3 Proste przypadki obciążenia
  - Pręty i układy prętowe
  - Skręcanie
  - Zginanie

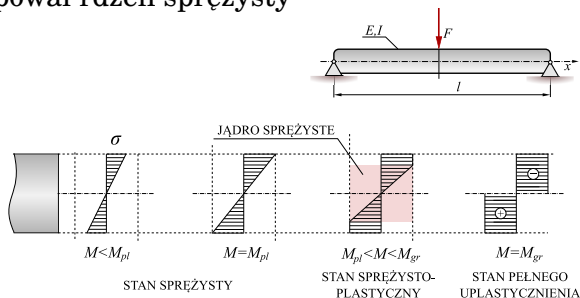
# Zginanie w zakresie sprężysto-plastycznym

- analogiczną analizę można przeprowadzić dla belki zginanej; dla przypadku belki przedstawionej na rysunku rozkład naprężeń na przekroju jest liniowy – w osi belki naprężenia są równe zero, na skrajnych włóknach osiągają wartości maksymalne
- rozkład momentu na długości jest trójkątny – maksimum pojawia się w połowie długości belki
- uplastycznienie rozpocznie się zatem w połowie długości belki i będzie postępowało od skrajnych włókien do środka belki



# Zginanie w zakresie sprężysto-plastycznym

- uplastycznienie rozpocznie się zatem w połowie długości belki i będzie postępowało od skrajnych włókien do środka belki
- między obciążeniem równym momentowi uplastyczniającemu i obciążeniem granicznym w belce będzie występował rdzeń sprężysty



# Zginanie w zakresie sprężysto-plastycznym

- podobnie jak w przypadku skręcania, w momencie uplastycznienia całego przekroju belki pojawi się w tym miejscu przegub plastyczny, który zmieni belkę w mechanizm – zachowuje się jak dwie belki połączone w połowie długości przegubem
- stosunek momentu uplastyczniającego  $M_{pl}$  do momentu granicznego  $M_{gr}$  jest równy 1,5; oznacza to, że dzięki plastycznym właściwościom materiału po przekroczeniu granicy plastyczności w skrajnych włóknach jest jeszcze zapas 50% obciążenia uplastyczniającego, zanim belka ulegnie zniszczeniu

# Literatura

- 1 Dyląg Z., Jakubowicz A., Orłoś Z. *Wytrzymałość materiałów. Tom I*, WNT, Warszawa, 2013
- 2 Gere JM., Goodno BJ. *Mechanics of materials*, Cengage Learning, Australia, 2009
- 3 Ostwald M. *Podstawy wytrzymałości materiałów i konstrukcji*, WPP, Poznań, 2017