

# Wytrzymałość Materiałów II

## Stateczność prętów ściskanych Zakres sprężysto-plastyczny

opracował:

dr hab. inż. Paweł JASION

e-mail: `pawel.jasion@put.poznan.pl`

www:`pawel.jasion.pracownik.put.poznan.pl`

Politechnika Poznańska  
Instytut Mechaniki Stosowanej  
Zakład Wytrzymałości Materiałów i Konstrukcji

- 1 Ściskanie prętów w zakresie sprężysto-plastycznym
  - Smukłość pręta
  - Obliczanie prętów ściskanych osiowo

# Plan wykładu

- 1 Ściskanie prętów w zakresie sprężysto-plastycznym
  - Smukłość pręta
  - Obliczanie prętów ściskanych osiowo

# Obciążenie krytyczne

## Wyboczenie sprężysto-plastyczne

- metoda Eulera zakłada deformację układu w zakresie stosowalności prawa Hooke'a
- wymiary rzeczywistych prętów sprawiają, że naprężenia przy obciążeniu krytycznym przekraczają granicę proporcjonalności  $\sigma_H$
- należy zatem rozwiązywać zadanie ze względu na naprężenia krytyczne  $\sigma_{kr}$ , a nie siłę krytyczną  $F_{kr}$ , sprawdzając warunek

$$\sigma_{kr} \leq \sigma_H$$

# Obciążenie krytyczne

## Wyboczenie sprężysto-plastyczne

- naprężenia krytyczne zdefiniujemy jako iloraz siły krytycznej i pola przekroju poprzecznego

$$\sigma_{kr} = \frac{F_{kr}}{A}$$

- z rozwiązania Eulera wiemy, że siłę krytyczną wyrażamy zależnością

$$F_{kr} = \frac{\pi^2 EI_z}{(\mu l)^2}$$

- zatem naprężenia krytyczne będą równe

$$\sigma_{kr} = \frac{\pi^2 EI_z}{(\mu l)^2 A}$$

# Obciążenie krytyczne

## Wyboczenie sprężysto-plastyczne

- oznaczone na czerwono wielkości odnoszą się do geometrii pręta i jego podparcia; łączymy je ze sobą wprowadzając bezwymiarowy parametr nazywany smukłością pręta

$$\lambda = \mu l \sqrt{\frac{A}{I_z}}$$

- wyrażenie na naprężenia krytyczne będzie miało postać

$$\sigma_{kr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$$

- ponieważ moment bezwładności może mieć różne wartości względem różnych osi, należy wybrać wartość najmniejszą

# Obciążenie krytyczne

## Wyboczenie sprężysto-plastyczne

- uwzględniając warunek na naprężenia krytyczne  $\sigma_{kr} \leq \sigma_H$  można określić warunek stateczności

$$\lambda \geq \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_H}} = \lambda_H$$

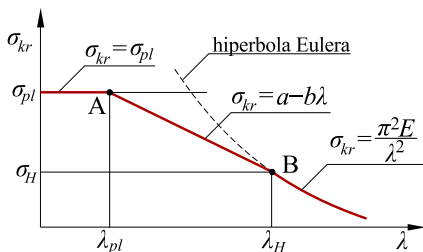
- wielkość  $\lambda_H$  nazywamy smukłością graniczną; jest to minimalna wartość smukłości, przy której można stosować wzór Eulera; dla mniejszych wartości pręt uplastyczni się przed utratą stateczności
- pręty, dla których  $\lambda \geq \lambda_H$  nazywamy prętami o dużej smukłości

# Obciążenie krytyczne

## Wyboczenie sprężysto-plastyczne

Obliczenia stateczności prętów w zakresie sprężysto-plastycznym przeprowadza się biorąc pod uwagę wyniki eksperymentów. Wyróżnia się trzy obszary, które można przedstawić na płaszczyźnie  $\sigma_{kr} - \lambda$ .

- dla  $\lambda \geq \lambda_H$  wzór Eulera jest zgodny z eksperymentem

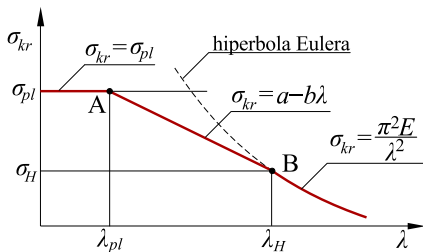


# Obciążenie krytyczne

## Wyboczenie sprężysto-plastyczne

- pręty o małej smukłości nie tracą stateczności; ulegają ściśnięciu, a kryterium zniszczenia jest osiągnięcie naprężeń plastycznych  $\sigma_{pl}$

$$\lambda_{pl} = 0,2 - 0,3\lambda_H$$



# Obciążenie krytyczne

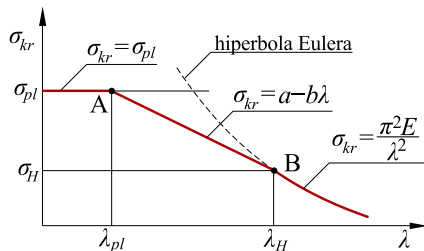
## Wyboczenie sprężysto-plastyczne

- pomiędzy punktami A i B wykonuje się aproksymację liniową

$$\sigma_{kr} = a - b\lambda$$

$$a = \frac{\sigma_{pl}\lambda_H - \sigma_H\lambda_{pl}}{\lambda_H - \lambda_{pl}}$$

$$b = \frac{\sigma_{pl} - \sigma_H}{\lambda_H - \lambda_{pl}}$$



# Obciążenie krytyczne

## Wyboczenie sprężysto-plastyczne

- zbiorcze rozwiązanie można zapisać następująco

$$\sigma_{kr} = \begin{cases} \sigma_{pl} & \text{dla } \lambda \leq \lambda_{pl} \\ a - b\lambda & \text{dla } \lambda_{pl} < \lambda < \lambda_H \\ \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} & \text{dla } \lambda \geq \lambda_H \end{cases}$$

- warto zauważyć, że aby zbudować wykres  $\sigma_{kr}-\lambda$  wystarczy znać właściwości materiału  $E$ ,  $\sigma_H$ ,  $\sigma_{pl}$
- wyznaczenie naprężeń krytycznych sprowadza się to obliczenia smukłości dla zadanej geometrii i odczytania z wykresu  $\sigma_{kr}$ ; zwykle przyjmuje się  $\sigma_{pl} = R_e$

# Plan wykładu

- 1 Ściskanie prętów w zakresie sprężysto-plastycznym
  - Smukłość pręta
  - Obliczanie prętów ściskanych osiowo

# Rozwiązywanie zadań

## Przypadek ogólny

- analizując stateczność prętów ściskanych należy sprawdzić jeden z warunków stateczności

$$F \leq F_{dop} = \frac{F_{kr}}{n}, \quad \sigma \leq \sigma_{dop} = \frac{\sigma_{kr}}{n}$$

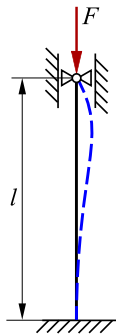
- dla przyjętych danych materiałowych  $\sigma_{pl}$ ,  $\sigma_H$ ,  $E$  wyznaczyć smukłość graniczną  $\lambda_H$
- przyjąć  $\lambda_{pl} = 0, 3\lambda_H$  i sporządzić wykres  $\sigma_{kr} - \lambda$
- wyznaczyć smukłość pręta  $\lambda$  i z wykresu odczytać wartość naprężeń krytycznych; siła krytyczna to naprężenia krytyczne pomnożone przez przekrój poprzeczny pręta

# Obciążenie krytyczne – wyboczenie plastyczne

## Przykład 1

Wyznaczyć siłę dopuszczalną dla pręta przedstawionego na rysunku, przyjmując współczynnik bezpieczeństwa  $n = 2,5$ . Pręt wykonany jest z dwuteownika I120. Długość pręta  $l = 1,5$  m; dane materiałowe:  $E = 210000$  MPa,  $\sigma_H = 210$  MPa,  $\sigma_{pl} = 240$  MPa. Zgodnie z normą, parametry przekroju poprzecznego pręta to:

- $A = 14,2$  cm<sup>2</sup>,
- $I_x = 328$  cm<sup>4</sup>,
- $I_y = 21,5$  cm<sup>4</sup>.



# Obciążenie krytyczne – wyboczenie plastyczne

## Przykład 1

- rozpoczynamy od wyznaczenia smukłości granicznej

$$\lambda_H = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_H}} = \pi \sqrt{\frac{210000 \text{ MPa}}{210 \text{ MPa}}} = 99,3$$

- następnie wyznaczamy smukłość pręta; przyjmujemy mniejszą wartość momentu bezwładności, czyli  $I_y$ , a dla zadanego podparcia  $\mu = 0,7$

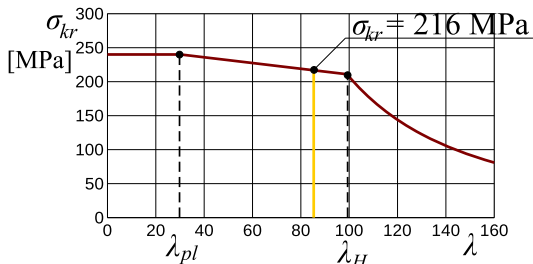
$$\lambda = \mu l \sqrt{\frac{A}{I_y}} = 0,7 \cdot 1500 \text{ mm} \sqrt{\frac{1420 \text{ mm}^2}{215000 \text{ mm}^4}} = 85,3$$

- zatem wyboczenie pojawi się w zakresie sprężysto-plastycznym, ponieważ  $\lambda < \lambda_H$

# Obciążenie krytyczne – wyboczenie plastyczne

## Przykład 1

- przygotowujemy wykres  $\sigma_{kr}-\lambda$ , przyjmując  $\lambda_{pl} = 0,3\lambda_H = 30$
- punkty charakterystyczne wykresu to  $(\lambda_{pl}, \sigma_{pl}) = (30, 240 \text{ MPa})$  oraz  $(\lambda_H, \sigma_H) = (99,3, 210 \text{ MPa})$
- hiperbolę Eulera możemy wyznaczyć ze wzoru na naprężenia krytyczne w obszarze sprężystym



# Obciążenie krytyczne – wyboczenie plastyczne

## Przykład 1

- ponieważ  $\lambda$  dla naszego pręta zawiera się między  $\lambda_{pl}$  i  $\lambda_H$  wartość naprężeń krytycznych wyznaczamy z zależności

$$\sigma_{kr} = a - b\lambda$$

- po wyznaczeniu stałych  $a$  i  $b$  mamy

$$\sigma_{kr} = 253 \text{ MPa} - 0,43 \text{ MPa} \cdot 85,3 = 216 \text{ MPa}$$

- mając naprężenia krytyczne możemy wyznaczyć siłę krytyczną

$$F_{kr} = \sigma_{kr} \cdot A = 216 \text{ MPa} \cdot 1420 \text{ mm}^2 = 307 \text{ kN}$$

# Obciążenie krytyczne – wyboczenie plastyczne

## Przykład 1

- siłę dopuszczalną uzyskamy dzieląc siłę krytyczną, czyli tą, która odpowiada momentowi utraty stateczności, przez współczynnik bezpieczeństwa

$$F_{dop} = \frac{F_{kr}}{n} = \frac{307 \text{ kN}}{2,5} = 123 \text{ kN}$$

# Obciążenie krytyczne – wyboczenie plastyczne

## Przykład 1 – rozwiązanie MES

- rozwiązanie analityczne:  
 $F_{kr} = 307 \text{ kN}; \sigma_{kr} = 216 \text{ MPa}$
- rozwiązanie numeryczne:  
 $F_{kr} = 342 \text{ kN}; \sigma_{kr} = 240 \text{ MPa}$

