Wytrzymałość Materiałów II

Stateczność konstrukcji – pręty ściskane

opracował:
dr hab. inż. Paweł JASION
e-mail: pawel.jasion@put.poznan.pl
www: pawel.jasion.pracownik.put.poznan.pl

Politechnika Poznańska
Instytut Mechaniki Stosowanej
Zakład Wytrzymałości Materiałów i Konstrukcji

Plan wykładu

1. Wprowadzenie do stateczności konstrukcji
   - Równowaga układu
   - Siły błonowe
2. Ściskanie pręta prostego
   - Wyniki eksperymentu
   - Obciążenie krytyczne – równanie Eulera
   - Analiza w zakresie nieliniowym – ścieżka równowagi
3. Przykłady obliczeniowe

Plan wykładu

1. Wprowadzenie do stateczności konstrukcji
   - Równowaga układu
   - Siły błonowe
2. Ściskanie pręta prostego
   - Wyniki eksperymentu
   - Obciążenie krytyczne – równanie Eulera
   - Analiza w zakresie nieliniowym – ścieżka równowagi
3. Przykłady obliczeniowe

Plan wykładu

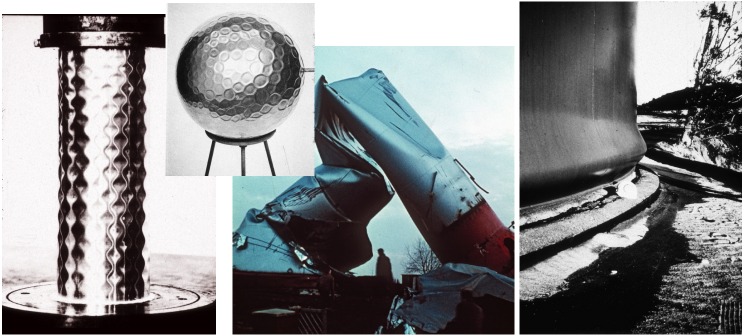
1. Wprowadzenie do stateczności konstrukcji
   - Równowaga układu
   - Siły błonowe
2. Ściskanie pręta prostego
   - Wyniki eksperymentu
   - Obciążenie krytyczne – równanie Eulera
   - Analiza w zakresie nieliniowym – ścieżka równowagi
3. Przykłady obliczeniowe

Plan wykładu

1. Wprowadzenie do stateczności konstrukcji
   - Równowaga układu
   - Siły błonowe
2. Ściskanie pręta prostego
   - Wyniki eksperymentu
   - Obciążenie krytyczne – równanie Eulera
   - Analiza w zakresie nieliniowym – ścieżka równowagi
3. Przykłady obliczeniowe

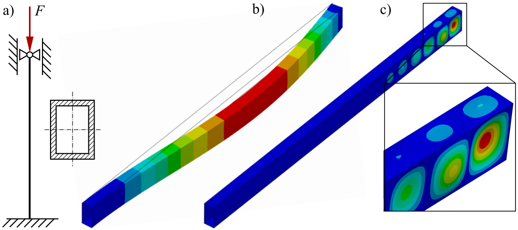
Przykłady utraty stateczności

- jednym z kryteriów definiujących niezawodność konstrukcji jest stateczność
- stateczność mogą utracić konstrukcje smukłe i cienkościenne



Utrata stateczności

- postać wyboczenia, czyli kształt, jaki konstrukcja przyjmie po utracie stateczności, ma zazwyczaj kształt jednej lub kilku fal
- wyboczenie może mieć charakter globalny (b) lub lokalny (c)
- obciążenie, przy którym następuje utrata stateczności nazywamy obciążeniem krytycznym



Rodzaje równowagi

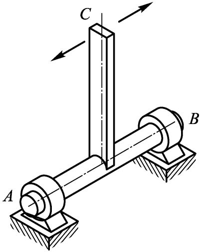
- w mechanice analizujemy obiekty znajdujące się w równowadze; jednak zazwyczaj nie zastanawiamy się, jaki jest charakter tej równowagi – nie badamy stateczności
- stateczność można rozumieć jako odpowiedź systemu na zaburzenia zewnętrzne

Położenie równowagi systemu jest stateczne, jeśli dowolnie małe wymuszenie wywołuje małe wychylenie systemu z tego położenia.

równowaga stateczna | równowaga niestateczna | równowaga obojętna

Rodzaje równowagi

- w praktyce stateczność konstrukcji, zależy od:
  - typu elementu konstrukcyjnego (pręt, płyta, powłoka)
  - wymiarów geometrycznych konstrukcji
  - rodzaju podparcia i obciążenia
  - początkowych niedoskonałości geometrycznych
- stateczność należy zatem badać indywidualnie dla danego układu i rozpatrzyć różne rodzaje wymuszeń, np. działające w różnych kierunkach

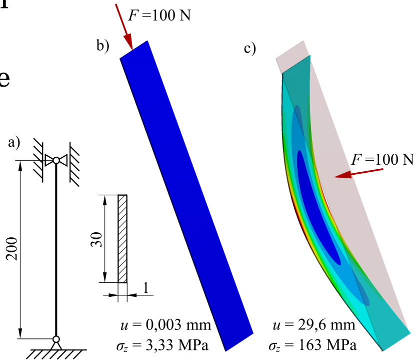


Plan wykładu

1. Wprowadzenie do stateczności konstrukcji
   - Równowaga układu
   - Siły błonowe
2. Ściskanie pręta prostego
   - Wyniki eksperymentu
   - Obciążenie krytyczne – równanie Eulera
   - Analiza w zakresie nieliniowym – ścieżka równowagi
3. Przykłady obliczeniowe

Błonowy stan naprężeń

- konstrukcje smukłe i cienkościenne przenoszą obciążenia poprzez siły błonowe
- odkształcenia przy tak rozłożonych siłach są bardzo małe (b)
- jednak odkształcenia w wyniku działania sił poprzecznych są duże (c)
- zatem konstrukcje smukłe i cienkościenne wykazują dużą sztywność błonową i małą sztywność giętną

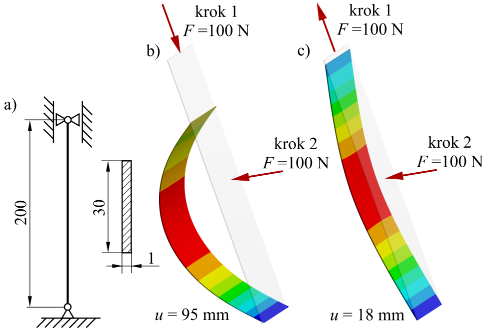


Błonowy stan naprężeń

- siły błonowe wpływają na sztywność giętną konstrukcji w dwojaki sposób
  - siły ściskające zmniejszają sztywność konstrukcji
  - siły rozciągające usztywniają konstrukcję (*stress stiffening*)
- widać to na przykładzie pręta przedstawionego na poprzednim slajdzie, który w wyniku działania siły poprzecznej ugiął się o 29,6 mm
- na następnym slajdzie przedstawiono wyniki dwóch analiz
  - w pierwszej z nich pręt został wstępnie ściśnięty siłą osiową, a dopiero później obciążony siłą poprzeczną
  - w drugiej, wstępna siła osiowa była rozciągająca

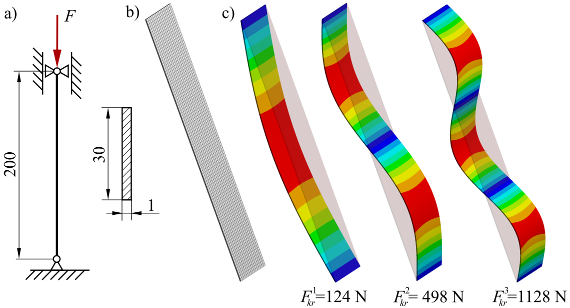
Błonowy stan naprężeń

- w pierwszym przypadku sztywność pręta spadła – ugięcie zwiększyło się o 220%
- w drugim przypadku sztywność pręta wzrosła – ugięcie zmniejszyło się o 40%



Błonowy stan naprężeń

- w skrajnym przypadku ściskające siły błonowe mogą być tak duże, że sztywność konstrukcji maleje do zera; wtedy, po przyłożeniu niewielkiej siły (zaburzenia) lub nawet bez dodatkowej siły dochodzi do ugięcia konstrukcji – konstrukcja traci stateczność



Błonowy stan naprężeń

- zjawisko utraty stateczności można wytłumaczyć przy pomocy podejścia energetycznego
- obciążenie przyłożone do konstrukcji wywołuje jej przemieszczenie; wykonuje zatem pracę, która jest zamieniana na energię odkształcenia postaciowego

$$W_e = \frac{1}{2}F\Delta l; \qquad U_\varepsilon = \frac{F^2 l}{2EA}$$

- ponieważ siły błonowe są duże, duża jest również energia odkształcenia

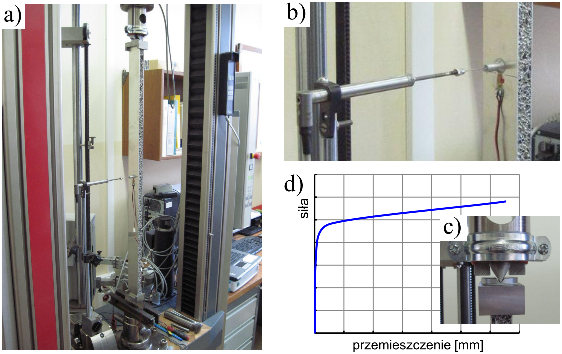
Błonowy stan naprężeń

- w momencie utraty stateczności następuje samoistna zamiana energii odkształcenia stanu błonowego w energię odkształcenia stanu zgięciowego
- ponieważ sztywność zgięciowa jest dużo mniejsza, aby zaabsorbować całą energię potrzebne jest duże ugięcie
- ilość energii pozostaje taka sama (poza niewielkimi stratami) ale odpowiada jej inna konfiguracja geometryczna
- zwykle prowadzi to do zniszczenia konstrukcji

Plan wykładu

Ściskanie pręta – eksperyment

- eksperyment pokazuje, że nawet przy osiowym ściskaniu pręt nieznacznie ugina się wraz ze wzrostem siły, a w pewnym momencie ugięcie to wzrasta gwałtownie – pręt traci stateczność

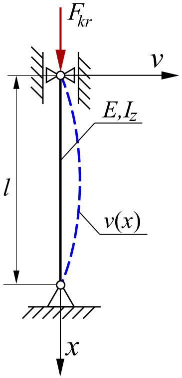


Plan wykładu

Obciążenie krytyczne (Euler 1744)

Wyboczenie sprężyste

- rozpatrzmy belkę ściskaną podpartą przegubowo na obu końcach; jeśli siła przyłożona jest w środku ciężkości przekroju poprzecznego i działa wzdłuż osi belki, to postać prostoliniowa jest postacią równowagi.
- spróbujmy znaleźć wartość siły, przy której ugięty pręt również pozostaje w równowadze (siłę krytyczną)
- stateczność konstrukcji analizujemy w stanie odkształconym



Obciążenie krytyczne (Euler 1744)

Wyboczenie sprężyste

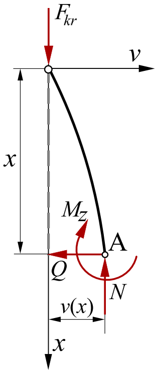
- rozpatrzmy równowagę odciętego, ugiętego fragmentu belki
- trzy nieznane siły wewnętrzne możemy wyznaczyć z równań równowagi

$$\sum F_x = 0 \rightarrow N = F_{kr}$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow Q = 0$$

$$\sum M_A = 0 \rightarrow M_z - F_{kr} v = 0$$

- praktyczne znaczenie będzie miało równanie ostatnie

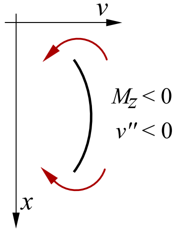


Obciążenie krytyczne (Euler 1744)

Wyboczenie sprężyste

- rozpatrujemy belkę w stanie zaburzonym
- zaburzenie to musi być małe, zatem ugięcie $v(x)$ również jest małe
- możemy zatem skorzystać z przybliżonego równania linii ugięcia belki (prawdziwego dla małych ugięć) aby uzyskać wyrażenie na M_z będące funkcja ugięcia

$$v'' = \pm\frac{M_z}{EI_z} \;\rightarrow\; M_z = \pm v''EI$$



- zgodnie z przyjętą konwencją znaków, dla przyjętego układu współrzędnych druga pochodna będzie w naszym przypadku ujemna

Obciążenie krytyczne (Euler 1744)

Wyboczenie sprężyste

- podstawiając otrzymane wyżej wyrażenie na moment gnący do równania równowagi otrzymamy liniowe równanie różniczkowe o stałych współczynnikach

$$v''EI_z + F_{kr}v = 0$$

- dzielą równanie przez EI_z i przyjmując $k^2 = F_{kr}/(EI_z)$ otrzymamy

$$v'' + k^2 v = 0$$

- ogólne rozwiązanie tego równania to

$$v = \mathrm{C}_1 \sin kx + \mathrm{C}_2 \cos kx \tag{1}$$

gdzie C_1 i C_2 są stałymi

Obciążenie krytyczne (Euler 1744)

Wyboczenie sprężyste

- stałe C_1 i C_2 wyznaczamy z warunków brzegowych; w rozważanym przypadku mamy dwa warunki:
  - $v(0) = 0$
  - $v(l) = 0$
- z pierwszego warunku otrzymamy $C_2 = 0$
- z drugiego warunku, uwzględniając powyższe, otrzymamy równanie

$$C_1 \sin kl = 0$$

- jest ono spełnione w dwóch przypadkach

Obciążenie krytyczne (Euler 1744)

Wyboczenie sprężyste

- przypadek pierwszy: $C_1 = 0$; pamiętając, że $C_2 = 0$, równanie (1) przyjmie postać

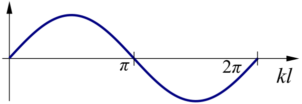
$$v \equiv 0$$

- na podstawie tego rozwiązania możemy stwierdzić, że pręt nieodkształcony pozostaje w stanie równowagi
- ponieważ jednak, jego wychylenie, będące zaburzeniem, jest równe zeru, nie możemy wnioskować o charakterze tej równowagi
- rozwiązanie to nie daje również informacji na temat obciążenia krytycznego

Obciążenie krytyczne (Euler 1744)

Wyboczenie sprężyste

- przypadek drugi: $C_1 \neq 0$; wtedy musi być prawdą, że $\sin kl = 0$
- to z kolei jest prawdziwe, gdy



$$kl = n\pi$$

gdzie n =1,2,...

- pozwala nam to wyznaczyć stałą k

$$k = \frac{n\pi}{l} \text{ a ponieważ } k^2 = \frac{F_{kr}}{EI_z}$$

- otrzymujemy ostatecznie wyrażenie na siłę krytyczną

$$F_{kr} = \frac{n^2\pi^2 EI_z}{l^2} \tag{2}$$

Obciążenie krytyczne (Euler 1744)

Wyboczenie sprężyste

- z wyrażeniem na siłę krytyczną związane jest równanie ugięcia pręta (1), które, dla $C_2 = 0$ przyjmuje postać

$$v(x) = C_1 \sin kx$$

- podstawiają wyznaczone wyżej wyrażenie na k otrzymamy linię ugięcia pręta po utracie stateczności

$$v(x) = C_1 \sin \frac{n\pi x}{l} \tag{3}$$

- aby zrozumieć sens fizyczny otrzymanego rozwiązania rozważmy przypadek dla $n = 1$

Obciążenie krytyczne (Euler 1744)

Wyboczenie sprężyste

- zakładając, że $n = 1$, równania (2) i (3) przyjmą postać

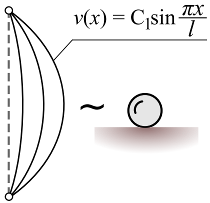
$$F_{kr}^{(1)} = \frac{\pi^2 E I_z}{l^2} \qquad \text{oraz} \qquad v^{(1)}(x) = C_1 \sin\frac{\pi x}{l}$$

- oznacza to, że przy sile krytycznej $F_{kr}^{(1)}$ zaburzony stan pręta opisany jest krzywą $v^{(1)}(x)$
- stan ten jest stanem równowagi dla dowolnej wartości C_1, która w tym przypadku odpowiada maksymalnemu wychyleniu pręta v_{max}
- wszystkie możliwe ugięte postacie pręta są możliwymi stanami równowagi

Obciążenie krytyczne (Euler 1744)

Wyboczenie sprężyste

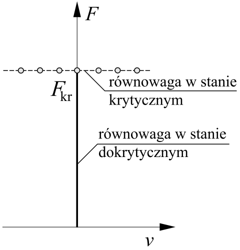
- ponieważ C_1 jest dowolną liczbą, różną od zera, to przy sile $F_{kr} = F_{kr}^{(1)}$ oprócz prostoliniowego stanu równowagi pojawia się nieskończenie wiele przyległych zgiętych stanów
- w ten sposób nieugięty stan równowagi staje się obojętnym (niestatecznym)



Obciążenie krytyczne (Euler 1744)

Wyboczenie sprężyste

- rozwiązanie otrzymane metodą Eulera pozwala ustalić, że:
  - przy sile $F \leq F_{kr}$ pręt jest w stanie równowagi i pozostaje prosty
  - przy sile $F = F_{kr}$ pojawia się nieskończenie wiele stanów równowagi
- nie można natomiast powiedzieć nic o charakterze równowagi – czy jest stateczny czy niestateczny
- rozwiązanie graficzne to nieskończona liczba punktów rozłożonych na prostej odpowiadającej sile $F = F_{kr}$



Obciążenie krytyczne (Euler 1744)

Wyboczenie sprężyste

- w ogólnym rozwiązaniu pojawia się n, które może przyjmować wartości całkowite

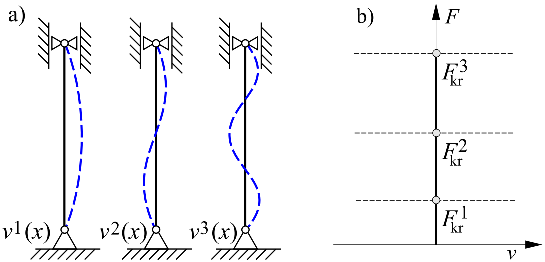
$$F_{kr} = \frac{n^2\pi^2 E I_z}{l^2}; \qquad v(x) = C_1 \sin\frac{n\pi x}{l}$$

- oznacza to, że możliwe są inne wartości siły krytycznej i odpowiadające im postacie wyboczenia
- wartość kolejnych obciążeń krytycznych będzie szybko wzrastać z kwadratem n, natomiast do postaci wyboczenia będą dochodziły kolejne półfale

Obciążenie krytyczne (Euler 1744)

Wyboczenie sprężyste

- trzy pierwsze postacie wyboczenia oraz odpowiadające im obciążenia krytyczne przedstawiono poniżej



Obciążenie krytyczne (Euler 1744)

Wyboczenie sprężyste

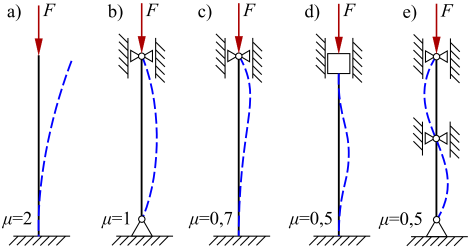
- z praktycznego punktu widzenia najważniejsza jest pierwsza wartość siły krytycznej i pierwsza postać wyboczenia, ponieważ zazwyczaj obciążenie przykładane jest stopniowo, od zera do wartości maksymalnej, więc wyboczenie pojawi się przy pierwszej możliwej sile krytycznej
- wyższe postacie wyboczenia mogą mieć znaczenie przy obciążeniach dynamicznych, gdy obciążenie przykładane jest w sposób nagły

Wpływ sposobu utwierdzenia

- stosując podejście Eulera można rozwiązać zagadnienie stateczności prętów o różnych podparciach. Ogólne wyrażenie na najniższą siłę krytyczną ma postać

$$F_{kr} = \frac{\pi^2 E I_z}{(\mu l)^2}$$

gdzie współczynnik μ zależy od warunków podparcia



Kontrolowanie stateczności

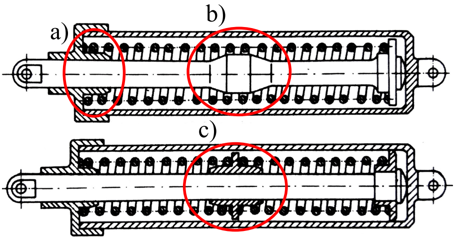
- przeanalizujmy wyrażenie na obciążenie krytyczne

$$F_{kr} = \frac{\pi^2 EI_z}{(\mu l)^2}$$

- w przeważającej większości przypadków konstrukcji, na etapie projektowania próbuje się albo uniknąć utraty stateczności, albo zwiększyć maksymalnie wartość obciążenia krytycznego
- zgodnie z powyższą zależnością, najbardziej efektywnym sposobem zwiększenia siły krytycznej jest zmniejszenie długości l pręta lub ewentualna zmiana sposobu podparcia μ – likwidacja przegubu
- innym sposobem jest zmiana kształtu przekroju poprzecznego – zwiększenie momentu bezwładności I_z

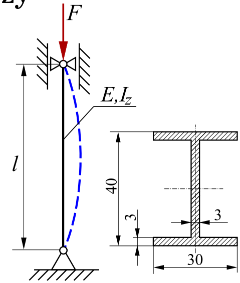
Kontrolowanie stateczności

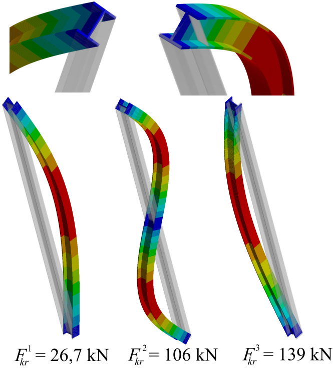
- przykładem elementu, który może ulec wyboczeniu jest długa sprężyna
- poniżej przedstawiono sposoby zwiększenia jej stateczności
  - wydłużenie części prowadzącej – usunięcie przegubu (a)
  - prowadzenie w połowie długości – dodatkowa podpora (b)
  - zastąpienie jednej długiej sprężyny dwoma krótszymi – zmniejszenie długości (c)



Kontrolowanie stateczności

- w przypadku prętów o przekroju okrągłym kierunku wyboczenia nie da się przewidzieć
- w przypadku innych przekroi pierwsza postać wyboczenia będzie wynikała z kierunku, dla którego moment bezwładności jest najmniejszy



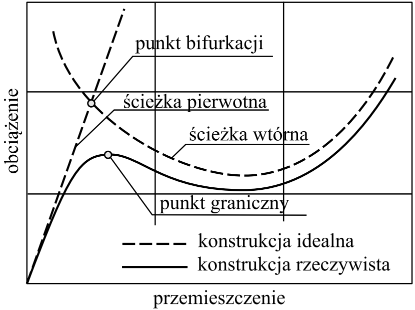


Plan wykładu

Nieliniowa analiza stateczności

Ścieżka równowagi

- pełną informację o zachowaniu się konstrukcji można uzyskać badając tzw. ścieżkę równowagi
- przedstawia ona zależność przemieszczenia wybranego punktu konstrukcji od wartości obciążenia



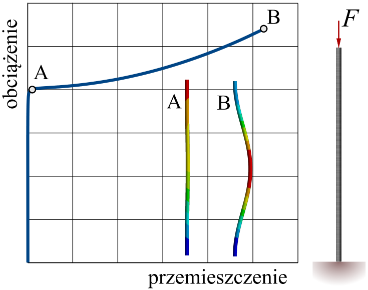
Nieliniowa analiza stateczności

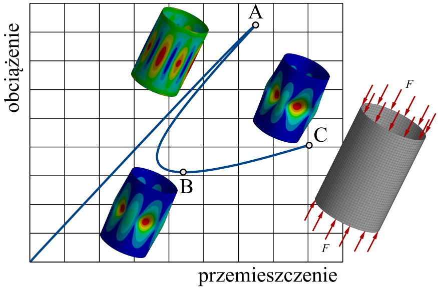
Ścieżka równowagi

- otrzymujemy zatem pełną informację co dzieje się z konstrukcją w obszarze dokrytycznym, w punkcie krytycznym oraz w obszarze zakrytycznym, czyli po utracie stateczności
- ze ścieżki równowagi możemy więc odczytać, czy równowaga układu po utracie stateczności jest stateczna czy niestateczna

Nieliniowa analiza stateczności

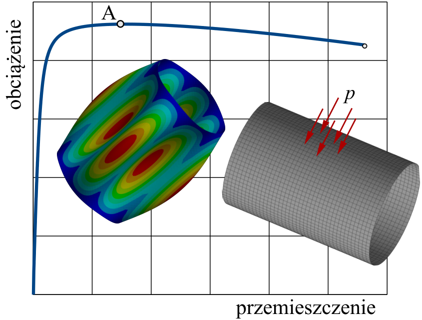
Ścieżka równowagi – przykłady

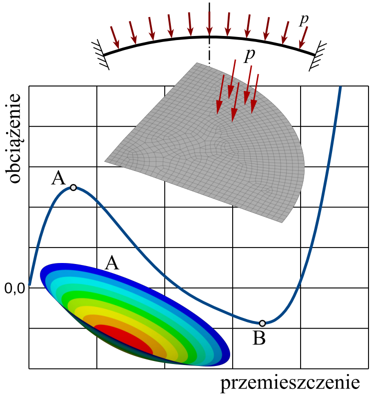




Nieliniowa analiza stateczności

Ścieżka równowagi – przykłady





Obciążenie krytyczne – rozwiązanie dokładne

Wyboczenie sprężyste

- w rozwiązaniu Eulera przyjmuje się przybliżone wyrażenie na krzywiznę pręta, co daje równanie

  $$v'' + k^2 v = 0$$

  i przybliżone rozwiązanie problemu
- rozwiązanie dokładne otrzyma się rozwiązują równanie

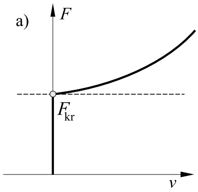
  $$\frac{v''}{\left(1 + (v')^2\right)^{3/2}} + k^2 v = 0$$

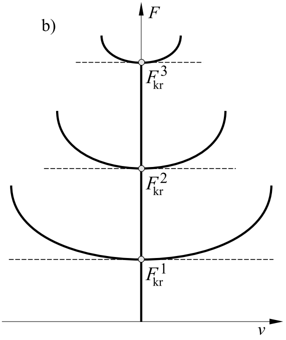
  w którym uwzględnia się pełne wyrażenie na krzywiznę

Nieliniowa analiza stateczności

Ścieżka równowagi – pręt ściskany

- pojedynczą ścieżkę równowagi dla pręta ściskanego przedstawiono na rysunku a); po utracie stateczności pręt ugina się, a obciążenie rośnie; oznacza to, że ścieżka równowagi jest stateczna – do zwiększenia ugięcia wymagane jest zwiększenie obciążenia
- rozwiązanie dokładne dla trzech pierwszych postaci wyboczenia przedstawiono na rysunku b)





Nieliniowa analiza stateczności

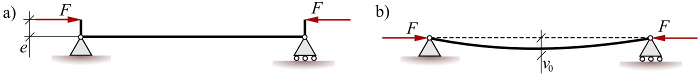
Pręty rzeczywiste

- do tej pory zakładaliśmy, że pręt jest idealnie prosty, a siła przyłożona jest w osi pręta
- w rzeczywistych konstrukcjach zawsze pojawiają się niedoskonałości (imperfekcje) zaburzające stan idealny; są nimi
    - niedoskonałości geometryczne – skrzywienie pręta wynikające z procesu produkcji; wstępne ugięcie powstałe przy montażu
    - niedoskonałości warunków brzegowych – mimośrodowo przyłożona siła; mimośrodowe podparcie
    - niedoskonałości materiałowe – niejednorodność lub nieciągłość materiału
- wszystkie powyższe czynniki wpływają na zjawisko utraty stateczności

Nieliniowa analiza stateczności

Pręty rzeczywiste

- wpływ mimośrodowego przyłożenia siły oraz wstępnego ugięcia pręta można określić rozwiązując poniższe zagadnienia

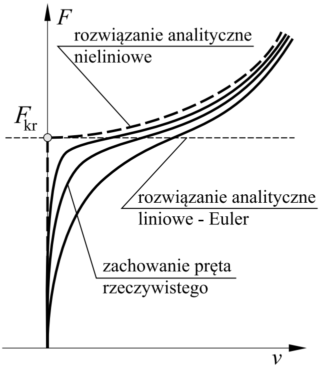


- w obu przypadkach, co widać nawet bez rozwiązywania zagadnienia, pręt będzie się uginał od samego początku
- stopień tego ugięcia będzie zależał od wielkości niedoskonałości początkowych

Nieliniowa analiza stateczności

Pręty rzeczywiste

- poniżej przedstawiono typowe ścieżki równowagi dla pręta z niedoskonałościami
- widać, że ścieżki równowagi odbiegają od rozwiązana analitycznego tym bardziej, im większa jest niedoskonałość początkowa

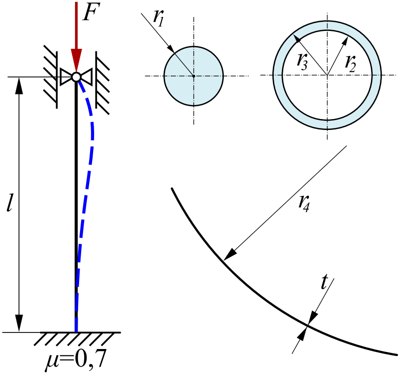


Obciążenie krytyczne – wyboczenie sprężyste

Przykład

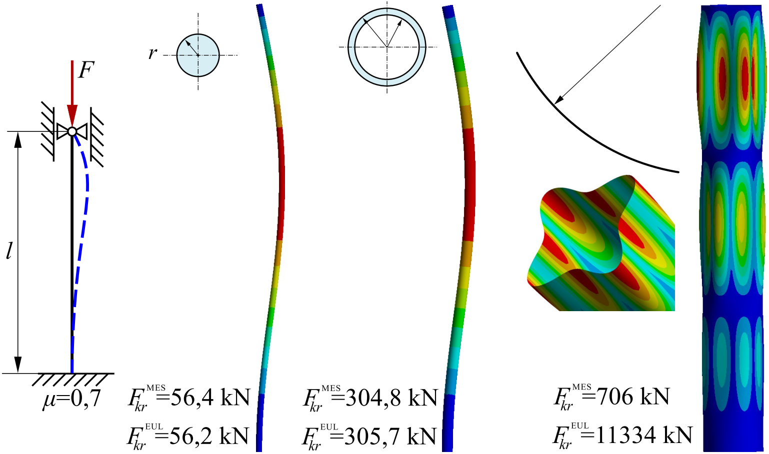
Wyznaczyć wartość obciążenia krytycznego przedstawionego na rysunku. Rozpatrzyć trzy różne przekroje poprzeczne przy założeniu, że masa pozostaje niezmienna.

- $r_1 = 20$ mm
- $r_2 = 30$ mm
- $r_3 = 36$ mm
- $r_4 = 200,5$ mm
- $t = 1$ mm
- $l = 3000$ mm
- $E = 200000$ MPa



Obciążenie krytyczne – wyboczenie sprężyste

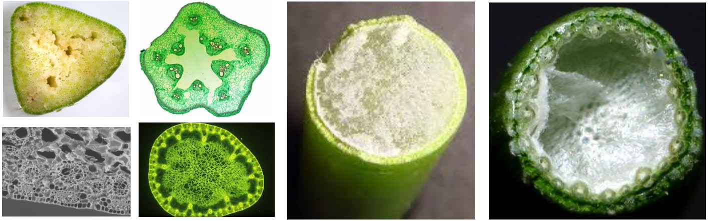
Przykład – rozwiązanie



Obciążenie krytyczne – wyboczenie sprężyste

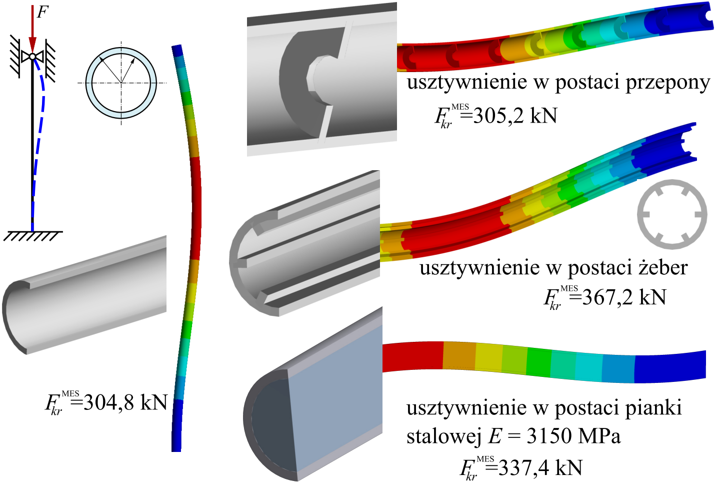
Zwiększanie sztywności

- sztywność elementów smukłych można zwiększyć wprowadzając modyfikacje ich geometrii
- modyfikacje te często są wynikiem obserwacji natury
    - rura cienkościenna wypełniona lekką pianką
    - rura cienkościenna z żebrami
    - rura z materiału porowatego
    - cibora papirusowa – przekrój trójkątny



Obciążenie krytyczne – wyboczenie sprężyste

Zwiększanie sztywności



Wzór Eulera – praktyczne zastosowanie

Regały magazynowe

Bibliografia

Belyaev N.M.
Strenght of materials
MIR Publishers, Moscow, 1979

Gorškov A. G., Trošin V. N., Šalašilin V. I.
Soprotivlenie materialov
FIZMATLIT, Moscow, 2005

Gere J.M., Goodno B.J.
Mechanics of materials
Cengage Learning, Australia, 2009