

Wytrzymałość Materiałów II

Wstęp do analizy stanu naprężeń

opracował:

dr hab. inż. Paweł JASION

e-mail: `pawel.jasion@put.poznan.pl`

www: `pawel.jasion.pracownik.put.poznan.pl`

Politechnika Poznańska

Instytut Mechaniki Stosowanej

Zakład Wytrzymałości Materiałów i Konstrukcji

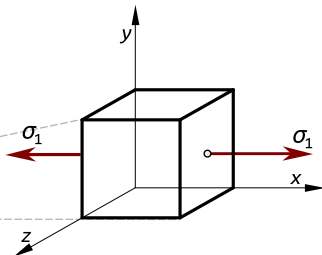
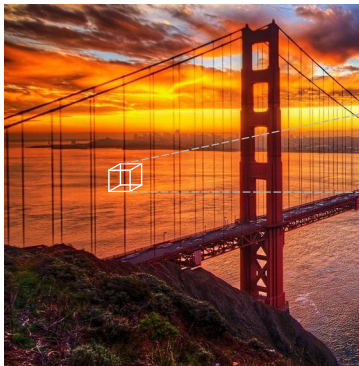
- 1 Prosty stan naprężeń
 - Jednoosiowy (liniowy) stan naprężeń
 - Naprężenia i kierunki główne
- 2 Złożone stany naprężeń
 - Dwuosiowy (płaski) stan naprężeń
 - Trójosiowy (przestrzenny) stan naprężeń
- 3 Wytrzymałość złożona
 - Hipotezy wytrzymałościowe
 - Rozwiązywanie zadań wytrzymałości złożonej

Plan wykładu

- 1 Prosty stan naprężeń
 - Jednoosiowy (liniowy) stan naprężeń
 - Naprężenia i kierunki główne
- 2 Złożone stany naprężeń
 - Dwuosiowy (płaski) stan naprężeń
 - Trójosiowy (przestrzenny) stan naprężeń
- 3 Wytrzymałość złożona
 - Hipotezy wytrzymałościowe
 - Rozwiązywanie zadań wytrzymałości złożonej

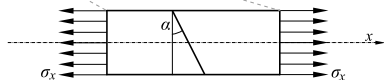
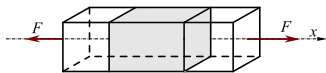
Jednoosiowy stan naprężen

- jednoosiowy stan naprężen do taki, w którym naprężenia pojawiają się tylko wzdłuż jednej osi; przykładem jest jednoosiowe rozciąganie

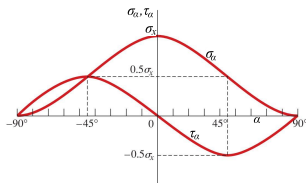


Jednoosiowy stan naprężen

- w dowolnym przekroju prostopadłym do osi występują dwie składowe naprężen σ_α i τ_α



$$\begin{cases} \sigma_\alpha = \sigma_x \cos^2 \alpha \\ \tau_\alpha = 0,5 \sigma_x \sin 2\alpha \end{cases}$$



Plan wykładu

- 1 Prosty stan naprężeń
 - Jednoosiowy (liniowy) stan naprężeń
 - Naprężenia i kierunki główne
- 2 Złożone stany naprężeń
 - Dwuosiowy (płaski) stan naprężeń
 - Trójosiowy (przestrzenny) stan naprężeń
- 3 Wytrzymałość złożona
 - Hipotezy wytrzymałościowe
 - Rozwiązywanie zadań wytrzymałości złożonej

Analiza stanu naprężeń

Stan naprężeń w punkcie

ogół naprężeń działających na wszystkich możliwych płaszczyznach przechodzących przez dany punkt

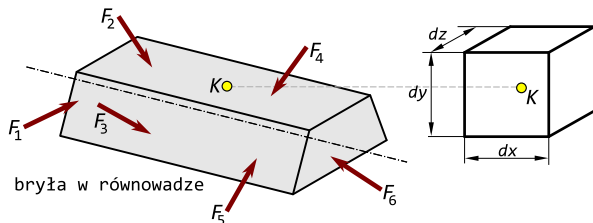
W jednoosiowym stanie naprężeń (czyste rozciąganie) rozkład naprężeń w dowolnym przekroju jest taki sam i jest jednorodny – naprężenia są takie same w każdym punkcie przekroju.

$$\begin{cases} \sigma_{\alpha} = \sigma_x \cos^2 \alpha \\ \tau_{\alpha} = 0,5\sigma_x \sin 2\alpha \end{cases}$$

Analiza stanu naprężeń

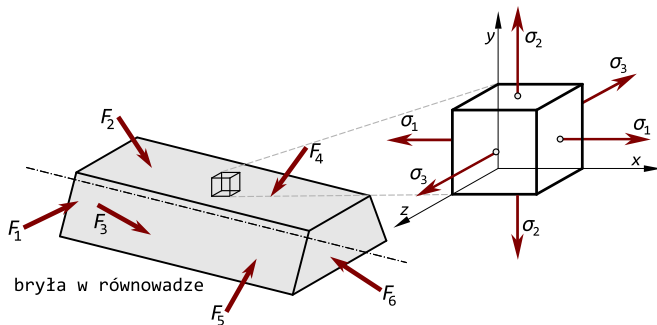
W ogólnym przypadku obciążenia, naprężenia w każdym punkcie są inne, a ich rozkład na danym przekroju nierównomierny.

W takim przypadku, chcąc analizować stan naprężeń w dowolnym punkcie K wycina się wokół niego myślowo prostopadłościan o nieskończenie małych wymiarach dx, dy, dz .



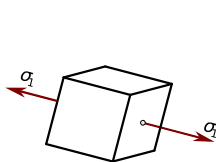
Analiza stanu naprężeń

- w każdym punkcie obciążonego elementu konstrukcyjnego można wskazać trzy wzajemnie prostopadłe płaszczyzny, na których nie pojawiają się naprężenia styczne

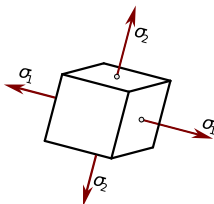


Analiza stanu naprężeń

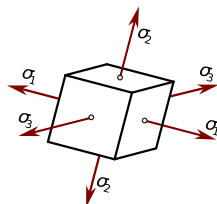
- płaszczyzny główne – płaszczyzny, na których nie działają naprężenia styczne
- naprężenia główne – naprężenia działające na płaszczyznach głównych (dwa z nich mają wartości ekstremalne)
- oznaczanie naprężeń głównych – $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$



liniowy
(jednoosiowy)



płaski
(dwoosiowy)



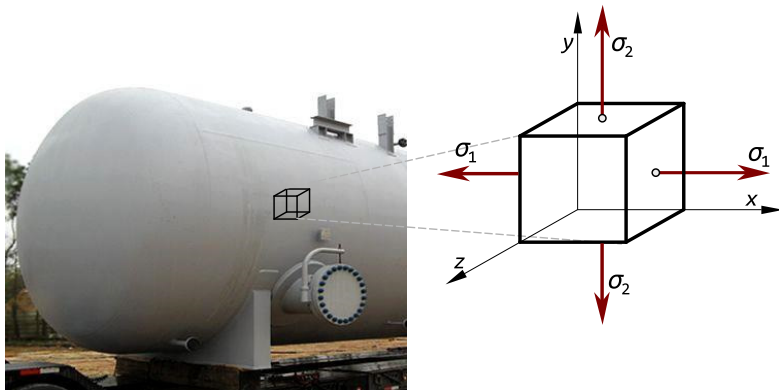
objętościowy
(trójosiowy)

Plan wykładu

- 1 Prosty stan naprężeń
 - Jednoosiowy (liniowy) stan naprężeń
 - Naprężenia i kierunki główne
- 2 **Złożone stany naprężeń**
 - **Dwuosiowy (płaski) stan naprężeń**
 - Trójosiowy (przestrzenny) stan naprężeń
- 3 Wytrzymałość złożona
 - Hipotezy wytrzymałościowe
 - Rozwiązywanie zadań wytrzymałości złożonej

Dwuosiowy stan naprężeń

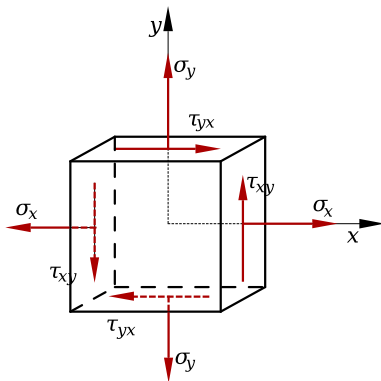
- na jednej z par ścianek równoległych nie pojawiają się naprężenia ($\sigma_3 = 0$)



Dwuosiowy stan naprężeń

Oznaczania naprężeń i konwencja znaków

- w ogólnym przypadku na ściankach równoległoboku pojawiają się naprężenia normalne i styczne (np. środek zginanego dwuteownika)

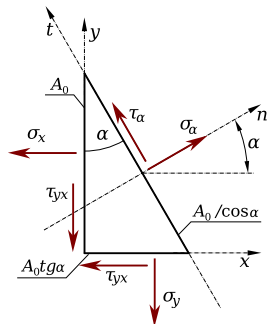


Dwuosiowy stan naprężeń

Rozpatrując równowagę fragmentu odciętego płaszczyzną nachyloną pod kątem $90^\circ + \alpha$ otrzymamy

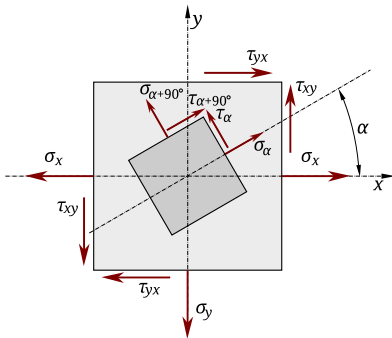
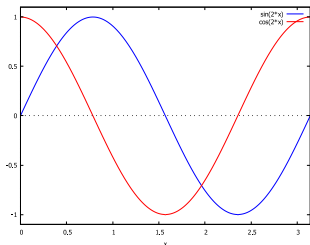
$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha$$

$$\tau_\alpha = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha$$



Dwuosiowy stan naprężeń

- powyższe równania pozwalają na wyznaczenie naprężeń normalnych i stycznych na ściankach elementu obróconego względem badanego punktu o kąt α
- znajdujące się w równaniach funkcje trygonometryczne są funkcjami kąta 2α , a ich okresem jest π



Dwuosiowy stan naprężeń

- zatem ich wartości dla kąta większego o $\pi/2$ będą takie same, ale znak będzie przeciwny
- zapiszmy zatem zależność na naprężenia na ścianie nachylonej pod kątem α i na ścianie do niej prostopadłej, czyli dla $\alpha + 90^\circ$

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha$$

$$\sigma_{\alpha+90^\circ} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha$$

Dwuosiowy stan naprężeń

- sumując oba równania otrzymamy

$$\sigma_{\alpha} + \sigma_{\alpha+90^{\circ}} = \sigma_x + \sigma_y$$

- zatem suma naprężeń na dwóch dowolnych prostopadłych ściankach jest stała i równa sumie naprężeń w analizowanym punkcie
- oznacza to, że jeśli wraz ze zmianą kąta jedno z naprężeń wzrasta, drugie maleje
- istnieje zatem taki stan, w którym naprężenie na jednej ze ścianek osiąga wartość maksymalną, a na drugiej minimalną

Dwuosiowy stan naprężeń

- wartość naprężeń ekstremalnych określimy przyrównując ich pochodną do zera; pochodna naprężeń normalnych jest równa

$$\frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha} = 2 \left(-\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha \right)$$

- z wyrażenia na naprężenia styczne wiemy, że

$$\tau_{xy} \cos 2\alpha = \tau_\alpha + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha$$

- co ostatecznie daje

$$\frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha} = 2\tau_\alpha$$

- przyrównanie tej pochodnej do zera pozwala stwierdzić, że na powierzchniach, na których działają naprężenia ekstremalne nie ma naprężeń stycznych

Dwuosiowy stan naprężeń

- wracając do wyrażenia na pochodną naprężeń normalnych i przyrównując ją do zera otrzymamy kąt nachylenia naprężeń głównych

$$\tan 2\alpha_0 = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

- po odpowiednich przekształcenia **wartości naprężeń głównych można wyznaczyć z zależności**

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$$

gdzie σ_1 – naprężenia maksymalne, σ_2 – naprężenia minimalne

Dwuosiowy stan naprężeń

Maksymalne naprężenia styczne

- rozpatrzmy teraz przypadek, gdy naprężenia główne są zgodnie z osiami układu współrzędnych, to znaczy $\sigma_x = \sigma_1$, $\sigma_y = \sigma_2$; mamy wtedy również $\tau_{zy} = 0$
- wyrażenia na naprężenia na ściankach pochyłych przyjmą wtedy postać

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha$$

$$\tau_\alpha = -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha$$

- z drugiego równania widać, że największe naprężenia styczne pojawią się dla kąta $\alpha = -45^\circ$; ich wartość to

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$

Dwuosiowy stan naprężeń

Maksymalne naprężenia styczne

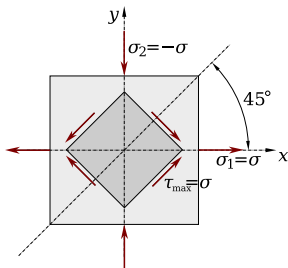
- podstawiając tu naprężenia główne otrzymamy

$$\tau_{max} = \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$$

- szczególnym przypadkiem jest taki, w którym w jednym kierunku działają naprężenia rozciągające równe σ , a w drugim ściskające, równe $-\sigma$; mamy wtedy do czynienia z przypadkiem czystego ścinania

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \frac{\sigma - (-\sigma)}{2} = \sigma$$

- stan taki pojawia się na powierzchni wału skręcanego



Dwuosiowy stan naprężeń

Trajektorie naprężeń

Trajektorie naprężeń głównych

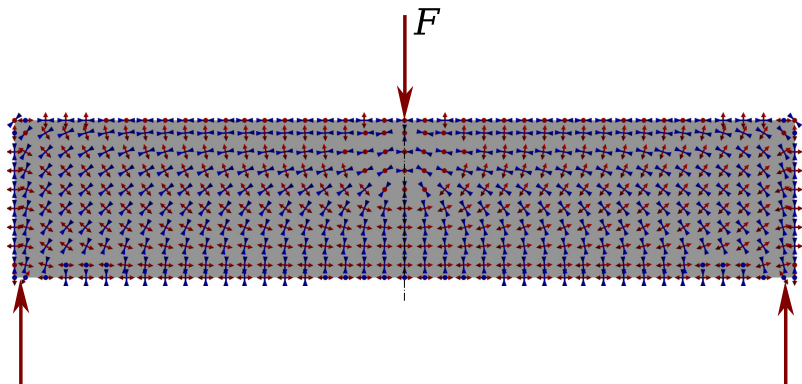
linie, dla których styczna w każdym punkcie jest zgodna z kierunkiem naprężeń głównych w tym punkcie

- znajomość trajektorii naprężeń głównych pozwala racjonalnie kształtować elementy konstrukcyjne
- materiały kompozytowe pozwalają na wzmocnienie elementu konstrukcyjnego poprzez ułożenie włókien wzdłuż trajektorii maksymalnych naprężeń głównych

Dwuosiowy stan naprężeń

Trajektorie naprężeń

Trajektorie naprężeń głównych w belce poddanej trójpunktowemu zginaniu



Dwuosiowy stan naprężeń

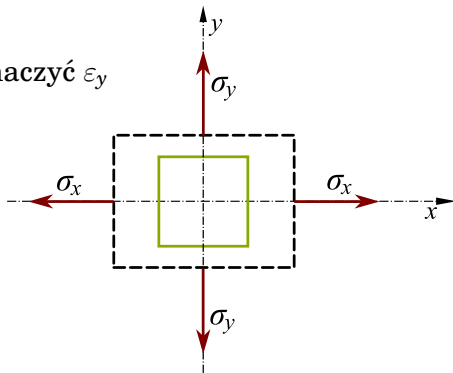
Prawo Hooke'a

W płaskim stanie naprężeń deformacja zachodzi w dwóch kierunkach. Odkształcenia w obu kierunkach powiązane są współczynnikiem Poissona

$$\nu = -\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x}$$

Wiedząc, że ε_x można wyznaczyć ε_y zakładając, że znane jest ν

$$\varepsilon_y = -\nu\varepsilon_x$$



Dwuosiowy stan naprężeń

Prawo Hooke'a

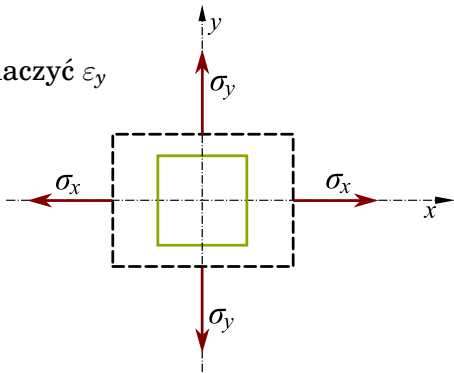
W płaskim stanie naprężeń deformacja zachodzi w dwóch kierunkach. Odkształcenia w obu kierunkach powiązane są współczynnikiem Poissona

$$\nu = -\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x}$$

Wiedząc, że ε_x można wyznaczyć ε_y zakładając, że znane jest ν

$$\varepsilon_y = -\nu\varepsilon_x$$

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y) \\ \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x) \end{cases}$$

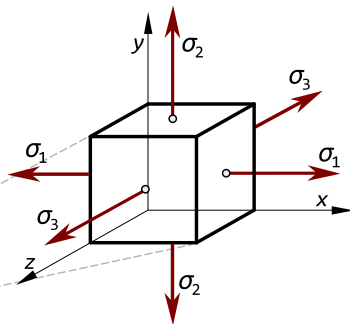


Plan wykładu

- 1 Prosty stan naprężeń
 - Jednoosiowy (liniowy) stan naprężeń
 - Naprężenia i kierunki główne
- 2 Złożone stany naprężeń
 - Dwuosiowy (płaski) stan naprężeń
 - Trójosiowy (przestrzenny) stan naprężeń
- 3 Wytrzymałość złożona
 - Hipotezy wytrzymałościowe
 - Rozwiązywanie zadań wytrzymałości złożonej

Trójosiowy stan naprężeń

- zadania trójosiowego stanu naprężeń rozwiązuje się narzędziami teorii sprężystości



Plan wykładu

- 1 Prosty stan naprężeń
 - Jednoosiowy (liniowy) stan naprężeń
 - Naprężenia i kierunki główne
- 2 Złożone stany naprężeń
 - Dwuosiowy (płaski) stan naprężeń
 - Trójosiowy (przestrzenny) stan naprężeń
- 3 **Wytrzymałość złożona**
 - **Hipotezy wytrzymałościowe**
 - Rozwiązywanie zadań wytrzymałości złożonej

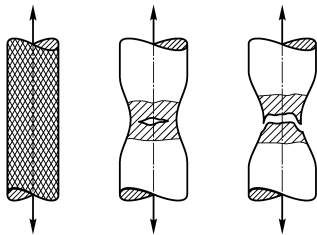
Hipotezy wytrzymałościowe

Graniczny stan naprężeń

stan naprężeń, przy którym zachodzą jakościowe zmiany właściwości mechanicznych materiału – płynięcie materiału plastycznego, pęknięcie materiału kruchego

Bazując na wynikach eksperymentów, wszystkie stany graniczne można podzielić na typy:

- kruche rozerwanie,
- kruche ścięcie,
- płynięcie plastyczne.



Hipotezy wytrzymałościowe

Rozwiązywanie zagadnień wytrzymałości materiałów polega na porównaniu naprężeń występujących w konstrukcji z naprężeniami dopuszczalnymi

$$\sigma_{max} \leq \sigma_{dop}$$

- σ_{max} – wyznaczone z modelu matematycznego
- σ_{dop} – wyznaczone w eksperymencie

W przypadku jednoosiowego rozciągania lub ściskania można jednoznacznie określić naprężenia powodujące zniszczenie

- dla materiałów plastycznych – R_e
- dla materiałów kruchych – R_m

Hipotezy wytrzymałościowe

W przypadku złożonego stanu naprężeń nie jest możliwe eksperymentalne określenie wartości składowych naprężeń prowadzących do zniszczenia.

Formułuje się hipotezy wytrzymałościowe – hipotezy dotyczące mechanizmów, przyczyn i warunków pojawienia się stanu granicznego.

Hipotezy wytrzymałościowe pozwalają na sprowadzenie złożonego stanu naprężenia do jednoosiowego rozciągania.

$$\sigma_{zast} = f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \leq \sigma_{dop}$$

Hipotezy wytrzymałościowe

Hipoteza maksymalnych naprężeń normalnych

niszczenie następuje wtedy, gdy jedno z naprężeń głównych osiąga wartość maksymalną

$$\sigma_{zast}^I = \frac{1}{2} \left(\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \right)$$

Hipoteza największych odkształceń

niszczenie następuje wtedy, gdy maksymalne odkształcenie osiąga wartość określoną w próbie rozciągania

$$\sigma_{zast}^{II} = \frac{1-\nu}{2} \sigma \pm \frac{1+\nu}{2} \left(\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \right)$$

Hipotezy wytrzymałościowe

Teoria maksymalnych naprężeń stycznych

materiał przechodzi w stan plastyczny, gdy maksymalne naprężenie styczne osiągnie pewną graniczną wartość, charakterystyczną dla tego materiału

$$\sigma_{zast}^{III} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$$

Hipoteza energetyczna

materiał przechodzi w stan plastyczny, gdy gęstość energii odkształcenia postaciowego osiąga pewną graniczną wartość, charakterystyczną dla tego materiału

$$\sigma_{zast}^{IV} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}$$

Hipotezy wytrzymałościowe

- w skrajnym przypadku, naprężenia zastępcze są równe naprężeniom uplastyczniającym
- zgodnie z hipotezą Hubera-von Misesa można zapisać

$$\sigma_{zast} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = R_e$$

- jeśli rozpatrzemy przypadek czystego ścinania, czyli $\sigma = 0$, to z powyższego otrzymamy

$$\tau = \frac{R_e}{\sqrt{3}} \approx 0,577R_e$$

- eksperymenty potwierdzają, że uplastycznienie przy czystym ścinaniu pojawia się dla $\tau = (0,56...0,6)R_e$

Plan wykładu

- 1 Prosty stan naprężeń
 - Jednoosiowy (liniowy) stan naprężeń
 - Naprężenia i kierunki główne
- 2 Złożone stany naprężeń
 - Dwuosiowy (płaski) stan naprężeń
 - Trójosiowy (przestrzenny) stan naprężeń
- 3 Wytrzymałość złożona
 - Hipotezy wytrzymałościowe
 - Rozwiązywanie zadań wytrzymałości złożonej

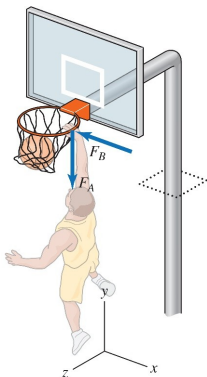
Rozwiązywanie zadań wytrzymałości złożonej

- 1 Sporządzamy wykresy wszystkich sił wewnętrznych i wybieramy przekroje niebezpieczne
- 2 Przeprowadzamy obliczenia wytrzymałościowe uwzględniając jedynie momenty gnące i skręcające.
- 3 Za pomocą wybranej hipotezy wytrzymałościowej wyznaczamy przekrój pręta.

Rozwiązywanie zadań wytrzymałości złożonej

Przykład 1 [Steif, 2012]

Sporządzić wykresy sił wewnętrznych w obu częściach wspornika. Wskazać przekroje niebezpieczne.



Rozwiązywanie zadań wytrzymałości złożonej

Przykład 2

Sporządzić wykresy sił wewnętrznych w wybranych prętach.

