

Wytrzymałość Materiałów II

Zginanie – belki kompozytowe

opracował:

dr hab. inż. Paweł JASION

e-mail: pawel.jasion@put.poznan.pl

www: pawel.jasion.pracownik.put.poznan.pl

Politechnika Poznańska

Instytut Mechaniki Stosowanej

Zakład Wytrzymałości Materiałów i Konstrukcji

1 Belki kompozytowe

- Charakterystyka konstrukcji kompozytowych
- Naprężenia w belce kompozytowej
- Belki trójwarstwowe

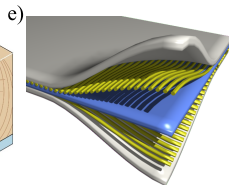
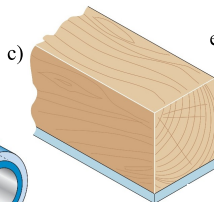
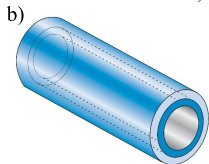
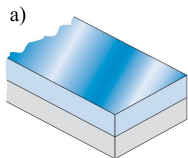
Plan wykładu

- 1 **Belki kompozytowe**
 - **Charakterystyka konstrukcji kompozytowych**
 - Naprężenia w belce kompozytowej
 - Belki trójwarstwowe

Konstrukcje kompozytowe

Elementy konstrukcyjne wykonane z więcej niż jednego materiału nazywane są kompozytowymi. Zalicza się do nich:

- elementy bimetralowe (a),
- rury izolowane (b),
- wzmocnione belki drewniane (c,d),
- laminaty (e).



Konstrukcje kompozytowe

- celem tworzenia kompozytów jest uzyskanie elementu konstrukcyjnego o dużej wytrzymałości i sztywności, ale jednocześnie o małej masie
- ponieważ powyższy cel przyświeca konstruktorom ze wszystkich branż, kompozyty stosuje się w przemyśle lotniczym, samochodowym czy sportowym
- uzyskuje się to dzięki połączeniu materiałów o skrajnie różnych właściwościach mechanicznych
- przykładem może być kompozyt z włóknem węglowym, w którym włókno węglowe przenosi obciążenie a żywica (wypełniacz) pozwala odpowiednio ukształtować kompozyt i połączyć wiele jego warstw

Plan wykładu

- 1 **Belki kompozytowe**
 - Charakterystyka konstrukcji kompozytowych
 - **Naprężenia w belce kompozytowej**
 - Belki trójwarstwowe

Belki kompozytowe

Naprężenia w belce kompozytowej

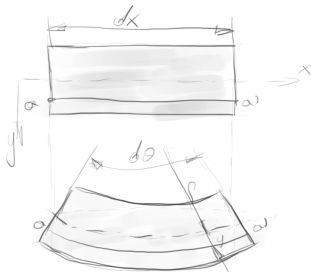
- przy analizie naprężeń w belkach kompozytowych przyjmujemy te same założenie, co w przypadku belek jednorodnych, tzn.
 - przekrój poprzeczny belki płaski przed odkształceniem pozostaje płaski i prostopadły do osi po odkształceniu
 - przekrój obraca się wokół osi obojętnej
 - materiał podlega prawu Hooke'a
 - moduły sprężystości wzdłużnej są takie same dla rozciągania i ściskania
- podobnie jak w przypadku belek jednorodnych musimy znaleźć
 - rozkład naprężeń
 - położenie osi obojętnej
 - zależność między naprężeniem i momentem gnącym

Belki kompozytowe

Naprężenia w belce kompozytowej

- rozpoczniemy od analizy odkształceń normalnych ε_x
- pojedyncze włókno aa' , oddalone od osi obojętnej o y ma długość dx
- po odkształceniu wydłuża się i przyjmuje kształt łuku kołowego o promieniu ρ
- jego długość można zapisać jako $(\rho + y)d\theta$
- początkowa długość to $\rho d\theta$
- możemy zatem zapisać

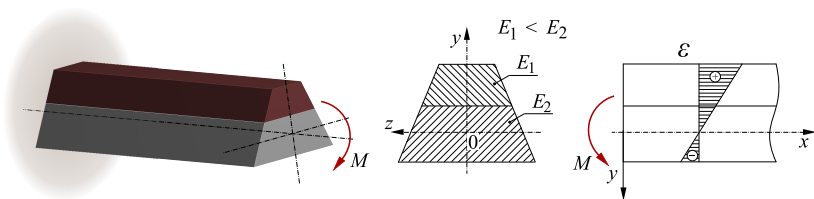
$$\varepsilon_x = \frac{\Delta dx}{dx} = \frac{(\rho + y)d\theta - \rho d\theta}{\rho d\theta} = \frac{y}{\rho}$$



Belki kompozytowe

Napężenia w belce kompozytowej

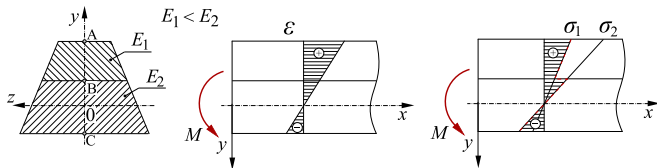
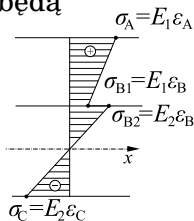
- zgodnie z otrzymaną zależnością odkształcenia nie zależą od materiału; zmieniają się liniowo wraz ze wzrostem odległości od osi y
- zatem, dla belki kompozytowej przedstawionej na rysunku, ich rozkład będzie taki sam, jak dla belki jednorodnej



Belki kompozytowe

Naprężenia w belce kompozytowej

- zastanówmy się jednak jak będzie wyglądał rozkład naprężeń; zgodnie z prawem Hooke'a $\sigma = E\varepsilon$
- zatem proste opisujące rozkład naprężeń będą nachylone inaczej dla obu materiałów;
- aby sporządzić wykres naprężeń dla belki kompozytowej należy połączyć ze sobą wykresy dla poszczególnych materiałów

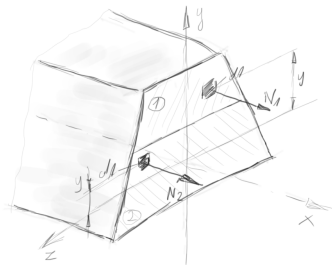


Belki kompozytowe

Naprężenia w belce kompozytowej

- wiemy już, jak wygląda rozkład naprężeń, nie wiemy jednak gdzie znajduje się oś obojętna
- jej położenie wyznaczymy z równania równowagi sumy sił wzdłuż osi x
- ponieważ mamy do czynienia z czystym zginaniem, jedyne siły wzdłużne to siły normalne pochodzące od naprężeń gnących
- jak już wiemy, naprężenia dla obu materiałów są różne, więc siły zapiszemy osobno dla każdej części przekroju

$$N_1 + N_2 = 0$$



Belki kompozytowe

Naprężenia w belce kompozytowej

- zgodnie z rysunkiem mamy

$$\int_{A_1} \sigma_{x_1} dA + \int_{A_2} \sigma_{x_2} dA = 0$$

- podstawiając do powyższego $\sigma_{x_1} = E_1 \frac{y}{\rho}$ oraz $\sigma_{x_2} = E_2 \frac{y}{\rho}$

i porządkując, możemy zapisać

$$E_1 \int_{A_1} y dA + E_2 \int_{A_2} y dA = 0$$

- powyższe całki to momenty statyczne poszczególnych części przekroju S_1 i S_2 , zatem mamy

$$E_1 S_1 + E_2 S_2 = 0$$

Belki kompozytowe

Naprężenia w belce kompozytowej

- momenty statyczne wyznaczamy indywidualnie dla zadanego przekroju; dla poniższego przykładu będzie

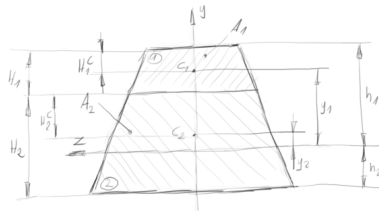
$$S_1 = y_1 A_1 = (h_1 - H_1^C) A_1$$

$$S_2 = y_2 A_2 = (h_1 - (H_1 + H_2^C)) A_2$$

- ostatecznie mamy

$$E_1(h_1 - H_1^C) A_1 + E_2(h_1 - (H_1 + H_2^C)) A_2 = 0$$

- jedyną niewiadomą jest h_1 ; jej wyliczenie pozwala wyznaczyć położenie osi obojętnej



Belki kompozytowe

Naprężenia w belce kompozytowej

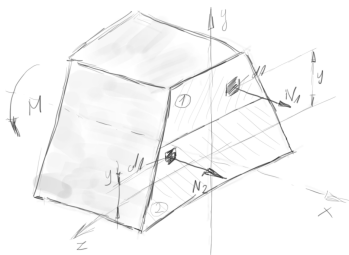
- pozostało nam wyznaczenie zależności naprężeń od obciążenia
- zależność tą otrzymamy z równania równowagi momentów względem osi z ; zgodnie z rysunkiem, pamiętając, że $dN_i = \sigma_{x_i} dA_i$, mamy

$$M - \int_{A_1} \sigma_{x_1} y dA - \int_{A_2} \sigma_{x_2} y dA = 0$$

- ponadto wiemy, że

$$\sigma_x = E \varepsilon_x$$

$$\varepsilon_x = \frac{y}{\rho}$$



Belki kompozytowe

Naprężenia w belce kompozytowej

- możemy zatem zapisać

$$M = \frac{E_1}{\rho} \int_{A_1} y^2 dA + \frac{E_2}{\rho} \int_{A_2} y^2 dA$$

- całki powyższe to momenty bezwładności względem osi z
- ostatecznie mamy

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{E_1 I_1 + E_2 I_2}$$

- dla porównania, dla belki jednorodnej jest

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$$

Belki kompozytowe

Napężenia w belce kompozytowej

- wracając do równania

$$\sigma_x = E\varepsilon_x = E\frac{1}{\rho}y$$

- możemy zapisać wyrażenia pozwalające na obliczenie napężeń w belce kompozytowej

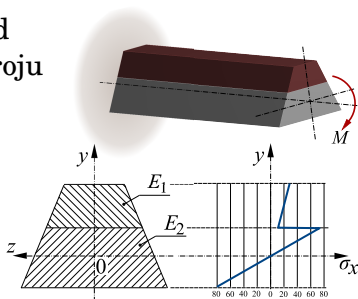
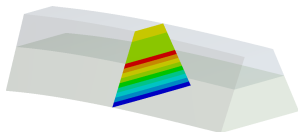
$$\sigma_1 = \frac{MyE_1}{E_1I_1 + E_2I_2} \quad \text{oraz} \quad \sigma_2 = \frac{MyE_2}{E_1I_1 + E_2I_2}$$

- za y podstawiamy punkt, w którym chcemy wyznaczyć napężenia

Belki kompozytowe

Naprężenia w belce kompozytowej

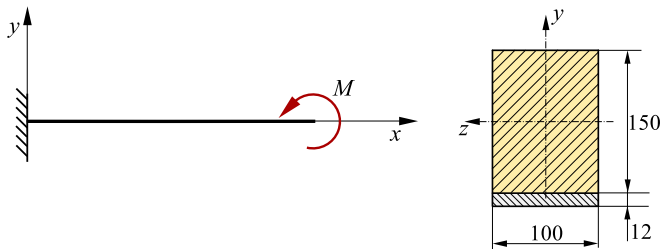
- ze względu na złożoność problemu analizy naprężeń w belce kompozytowej, zwłaszcza, gdy warstw materiału jest więcej niż dwie, wygodnie jest stosować metodę elementów skończonych
- dla naszego przykładu rozkład naprężeń w wybranym przekroju przedstawiono poniżej



Belki kompozytowe

Przykład [Gere i Goodno, 2009]

Belka kompozytowa przedstawiona na rysunku obciążona jest momentem gnącym $M = 6 \text{ kNm}$. Wyznaczyć ekstremalne wartości naprężeń normalnych w obu materiałach i narysować wykres naprężeń na przekroju. Moduły Younga dla poszczególnych warstw: $E_{\text{st}} = 200000 \text{ MPa}$, $E_{\text{dr}} = 12000 \text{ MPa}$.



Belki kompozytowe

Przykład [Gere i Goodno, 2009]

- rozpoczynamy od wyznaczenia osi obojętnej; zgodnie z rysunkiem możemy zapisać

$$S_1 = y_1 A_1 = (h_1 - 75 \text{ mm})(100 \text{ mm} \cdot 150 \text{ mm})$$

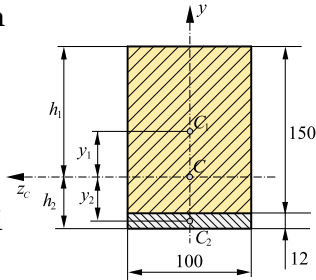
$$S_2 = y_2 A_2 = -(156 \text{ mm} - h_1)(100 \text{ mm} \cdot 12 \text{ mm})$$

- podstawiając to do wyrażenia na oś obojętną mamy

$$E_1 S_1 + E_2 S_2 = 0 \rightarrow h_1 = 121 \text{ mm}$$

$$h_2 = 162 \text{ mm} - h_1 = 41 \text{ mm}$$

- znając położenie osi obojętnej, a tym samym centralnej możemy z twierdzenia Steinera wyznaczyć moment bezwładności obu przekrojów



Belki kompozytowe

Przykład [Gere i Goodno, 2009]

- mamy zatem dla obu przekrojów

$$I_{z_1} = I_{z_{C_1}} + y_1^2 A_1$$

$$I_{z_1} = \frac{100 \text{ mm} \cdot (150 \text{ mm})^3}{12} + (h_1 - 75 \text{ mm})^2 \cdot 15000 \text{ mm}^2$$

$$I_{z_1} = 59865000 \text{ mm}^4$$

oraz

$$I_{z_2} = I_{z_{C_2}} + y_2^2 A_2 = 1484400 \text{ mm}^4$$

- mając wszystkie dane można przejść do wyznaczania naprężeń

Belki kompozytowe

Przykład [Gere i Goodno, 2009]

- napężenia wyznaczmy w punktach charakterystycznych, tzn. na powierzchniach zewnętrznych (punkty A i C), gdzie przyjmują one wartości ekstremalne oraz na styku obu materiałów (punkt B), gdzie pojawia się skok naprężeń

$$\sigma_{1A} = \frac{Mh_1E_1}{E_1I_1 + E_2I_2} = -8,6 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{1B} = \frac{M(h_2 - 12 \text{ mm})E_1}{E_1I_1 + E_2I_2} = 2.0 \text{ MPa}$$

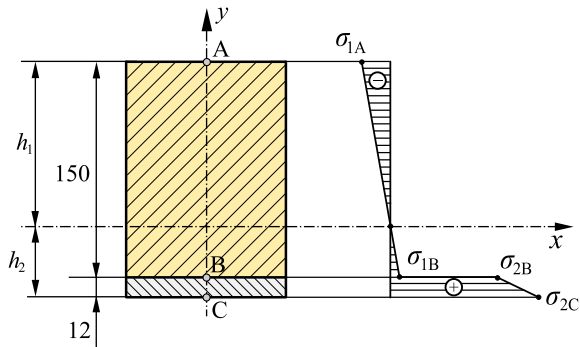
$$\sigma_{2B} = \frac{M(h_2 - 12 \text{ mm})E_2}{E_1I_1 + E_2I_2} = 34 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{2C} = \frac{Mh_2E_2}{E_1I_1 + E_2I_2} = 48 \text{ MPa}$$

Belki kompozytowe

Przykład [Gere i Goodno, 2009]

- wykres naprężeń przedstawiono poniżej



Plan wykładu

1 Belki kompozytowe

- Charakterystyka konstrukcji kompozytowych
- Naprężenia w belce kompozytowej
- Belki trójwarstwowe

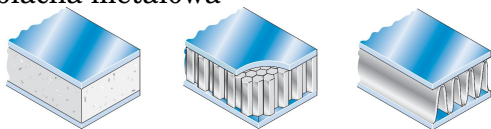
Belki sandwiczowe

Szczególnym przypadkiem belki kompozytowej jest **belka trójwarstwowa** (sandwiczowa); składa się ona z:

- rdzenia, którego głównym zadaniem jest utrzymywanie dystansu między okładzinami,
- okładzin, których zadaniem jest przenoszenie obciążeń.

Charakterystyka warstw:

- rdzeń – gruba warstwa lekkiego, często porowatego, materiału lub pofalowana blacha; materiał posiada często własności izolacyjne lub tłumiące
- okładziny – cienka blacha metalowa



Belki sandwiczowe

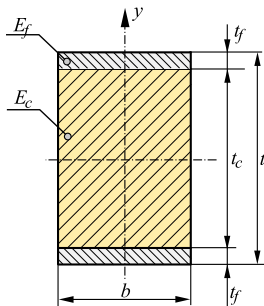
Wyznaczanie naprężeń

- naprężenia w belkach trójwarstwowych można wyznaczać z wyżej wyprowadzonych wzorów
- wzory te można uprościć wykorzystując właściwości tych belek
- zwykle $E_f \gg E_c$, więc można przyjąć $E_c = 0$, zatem $\sigma_c = 0$
- naprężenia normalne wyznacza się tylko w okładzinach

$$\sigma_f = \frac{My}{I_f} \text{ gdzie } I_f = \frac{b}{12}(t^3 - t_c^3)$$

- największe naprężenia

$$\sigma_f = \pm \frac{Mt}{2I_f}$$

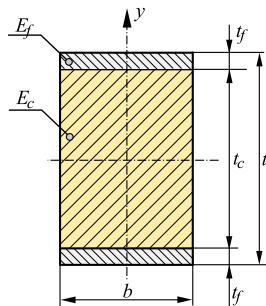


Belki sandwiczowe

Wyznaczanie naprężeń

- jeżeli okładziny są cienkie, $t_f \ll t_c$, to można przyjąć, że naprężenia styczne przenoszone są tylko przez rdzeń (naprężenia styczne na powierzchniach swobodnych są zerowe)
- wartość średnią tych naprężeń wyznaczamy z zależności

$$\tau_{sr} = \frac{T}{bt_c}$$

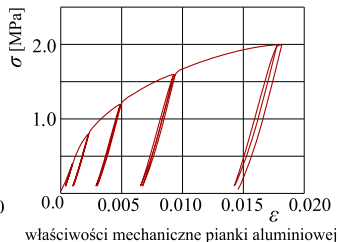
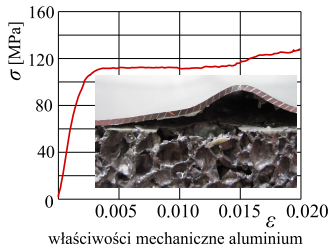


Belki sandwiczowe

Ograniczenia

Powyższe uproszczenia można stosować, gdy

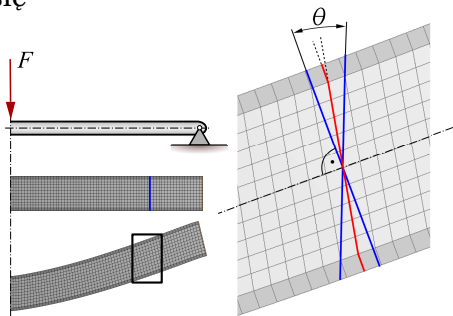
- oba materiały zachowują się zgodnie z prawem Hooke'a
 - w praktyce: nieliniowość rdzenia; różne granice plastyczności
- warstwy są ze sobą idealnie połączone
 - w praktyce: odklejanie okładzin; fałdowanie okładzin



Belki sandwiczowe

Deformacja przekroju poprzecznego

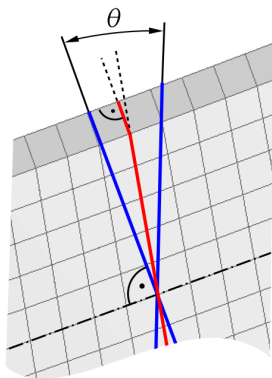
- dokładne wyznaczenie naprężeń wymagałoby przeanalizowania deformacji przekroju poprzecznego i na tej podstawie wyprowadzenia odpowiednich zależności
- najczęściej przyjmuje się hipotezę linii łamanej



Belki sandwichowe

Deformacja przekroju poprzecznego

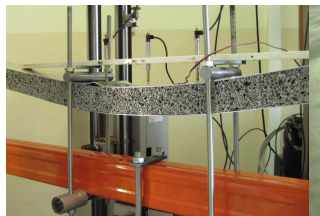
- w belce trójwarstwowej przekrój poprzeczny nie obraca się zgodnie z hipotezą E-B (linia niebieska), ale tworzy prostą łamaną (linia czerwona)
- proste prostopadłe pozostają jedynie przekroje w okładzinach



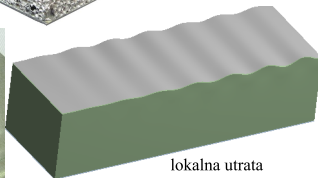
Belki sandwiczowe

Zjawiska lokalne

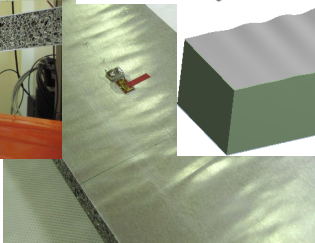
- ponieważ jedna z cienkich okładzin belki trójwarstwowej jest ściskana, może ona utracić stateczność



stanowisko badawcze



lokalna utrata
stateczności



Belki sandwiczowe

Zjawiska lokalne

- rozwój zjawisk lokalnych można wygodnie śledzić metodą elementów skończonych

