# Analiza Wytrzymałościowa Konstrukcji Mechanicznych

## Zagadnienia osiowo-symetryczne
## Rury grubościenne i krążki wirujące

dr hab. inż. Paweł JASION
e-mail: pawel.jasion@put.poznan.pl
www: pawel.jasion.pracownik.put.poznan.pl

Politechnika Poznańska
Instytut Mechaniki Stosowanej
Zakład Wytrzymałości Materiałów i Konstrukcji

# Plan wykładu

# Zastosowanie

Typowym zastosowaniem dla cylindrów grubościennych są

- zbiorniki ciśnieniowe
- siłowniki hydrauliczne
- lufy dział
- rury do transportu gorących cieczy
- połączenia wciskowe i skurczowe

## Założenia do analizy naprężeń

Cylindry grubościenne są zwykle obciążone osiowo-symetrycznie poprzez

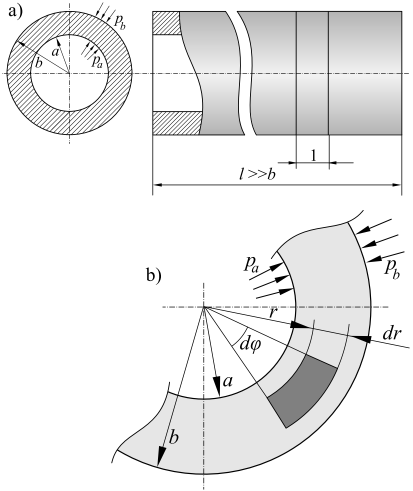
- zewnętrzne bądź wewnętrzne ciśnienie (lub oba jednocześnie)
- wysoką temperaturę

Jeśli cylinder nie jest otwarty, długi a naprężenia analizowane są z dala od punktu podparcia, prawdziwe są następujące założenia:

- odkształcenia są symetryczne względem osi obrotu i nie zmieniają się na długości cylindra
- z powodu symetrii nie występują siły styczne
- przekrój poprzeczny pozostaje płaski po przyłożeniu obciążenia

# Geometria cylindra grubościennego

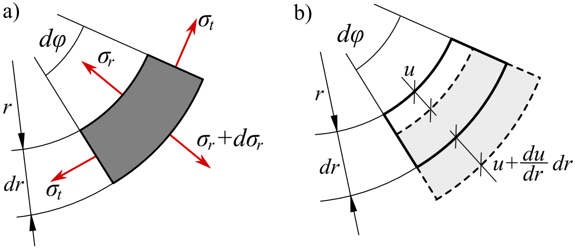
- promienie cylindra
  - wewnętrzny $a$
  - zewnętrzny $b$
- ciśnienie obciążające
  - wewnętrzne $p_a$
  - zewnętrzne $p_b$



# Wyznaczanie składowych naprężeń

## Zagadnienie Lame'go

- analizując równowagę wycinka cylindra otrzymuje się tylko jedno równanie równowagi, zawierające dwie nieznane funkcje:
  - naprężenia promieniowe $\sigma_r$
  - naprężenia obwodowe $\sigma_t$
- aby otrzymać dodatkowe równanie, należy rozważyć odkształcenia wycinka



# Wyznaczanie składowych naprężeń

## Zagadnienie Lame'go

- z równania równowagi otrzymujemy

$$\sigma_r - \sigma_t + \frac{d\sigma_r}{dr} r = 0$$

- analiza deformacji daje

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr} \quad \text{and} \quad \varepsilon_t = \frac{u}{r}$$

- wszystkie powyższe wielkości są związane prawem Hooke'a

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_r + \nu\varepsilon_t\right)$$

$$\sigma_t = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_t + \nu\varepsilon_r\right)$$

# Wyznaczanie składowych naprężeń

## Zagadnienie Lame'go

- w ten sposób obie składowe stanu naprężeń zostały zapisane jako funkcje przemieszczenia $u$

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{du}{dr} + \nu\frac{u}{r}\right)$$

$$\sigma_t = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{u}{r} + \nu\frac{du}{dr}\right)$$

- podstawiają powyższe do równania równowagi otrzymamy równanie różniczkowe z jedną zmienną, którą jest przemieszczenie $u$

# Wyznaczanie składowych naprężeń

## Zagadnienie Lame'go

Ostatecznie otrzymuje się równanie różniczkowe w postaci

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = 0$$

którego rozwiązanie ma postać

$$u = C_1 r - \frac{C_2}{r}$$

Stałe $C_1$ i $C_2$ można wyznaczyć z warunków brzegowych na wewnętrznej i zewnętrznej powierzchni cylindra.

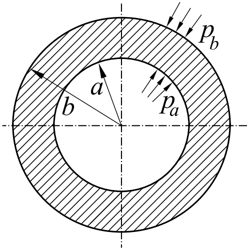
# Wyznaczanie składowych naprężeń

## Zagadnienie Lame'go

Postać ogólna składowych naprężeń, niezależna od warunków brzegowych

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2}\left[c_1(1+\nu) - c_2\frac{1-\nu}{r^2}\right]$$

$$\sigma_t = \frac{E}{1-\nu^2}\left[c_1(1+\nu) + c_2\frac{1-\nu}{r^2}\right]$$




Możliwe warunki brzegowe:

- dla $r = b \rightarrow \sigma_r = p_b$ i dla $r = a \rightarrow \sigma_r = p_a$
- dla $r = b \rightarrow \sigma_r = p_b$ i dla $r = a \rightarrow \sigma_r = 0$
- dla $r = b \rightarrow \sigma_r = 0$ i dla $r = a \rightarrow \sigma_r = p_a$

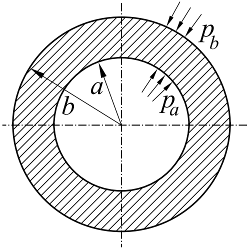
# Wyznaczanie składowych naprężeń

## Zagadnienie Lame'go

Dla przypadku, gdy działa zarówno ciśnienie wewnętrzne jak i zewnętrzne, składowe naprężeń wyrażają się następująco

$$\sigma_r = \frac{p_a a^2}{b^2 - a^2}\left(1 - \frac{b^2}{r^2}\right) - \frac{p_b b^2}{b^2 - a^2}\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)$$

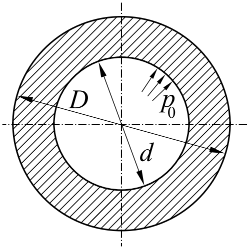
$$\sigma_t = \frac{p_a a^2}{b^2 - a^2}\left(1 + \frac{b^2}{r^2}\right) - \frac{p_b b^2}{b^2 - a^2}\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right)$$



# Zastosowanie zagadnienia Lame'go

## Przykład 1

Wyznaczyć rozkład naprężeń w grubościennym cylindrze hydraulicznym, dla którego maksymalne ciśnienie robocze ma wartość $p_0 = 20$ MPa. Średnica wewnętrzna $d = 40$ mm i średnica zewnętrzna $D = 50$ mm. Cylinder wykonany jest ze stali nierdzewnej, dla której moduł Younga $E = 200000$ MPa.

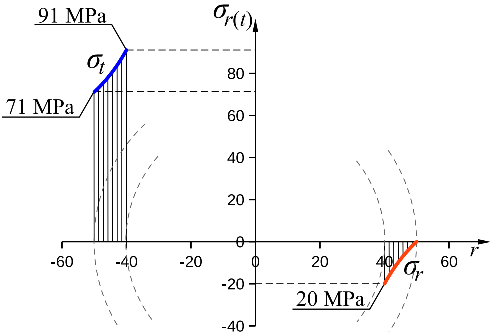


# Zastosowanie zagadnienia Lame'go

## Przykład 1

$$\sigma_r = \frac{p_a a^2}{b^2 - a^2}\left(1 - \frac{b^2}{r^2}\right)$$

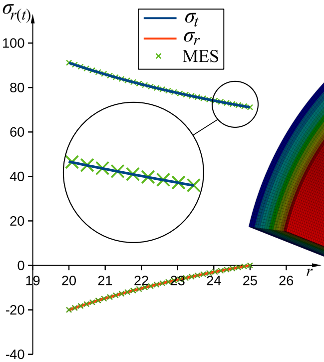
$$\sigma_t = \frac{p_a a^2}{b^2 - a^2}\left(1 + \frac{b^2}{r^2}\right)$$

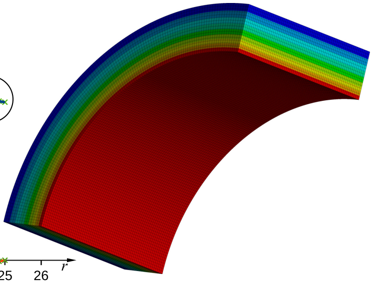


# Zastosowanie zagadnienia Lame'go

## Przykład 1 – rozwiązanie MES

- porównanie rozwiązania MES z rozwiązaniem analitycznym



# Zastosowanie zagadnienia Lame'go

## Analiza równania

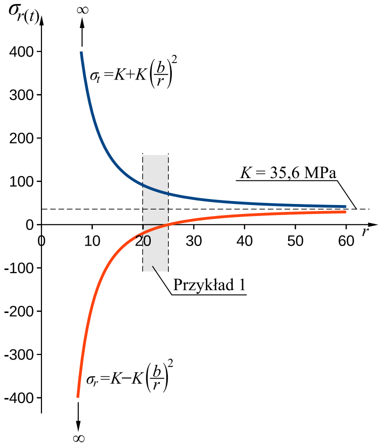
- dla obciążenia ciśnieniem wewnętrznym można zapisać

$$\sigma_r = K - K\left(\frac{b}{r}\right)^2$$

$$\sigma_t = K + K\left(\frac{b}{r}\right)^2$$

gdzie

$$K = \frac{p_a a^2}{b^2 - a^2}$$



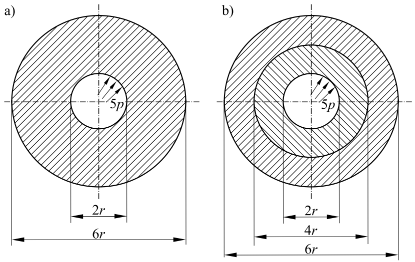

- dla każdego punktu:

$$\sigma_r + \sigma_t = 2K = 71.2 \text{ MPa}$$

# Zastosowanie zagadnienia Lame'go

## Przykład 2

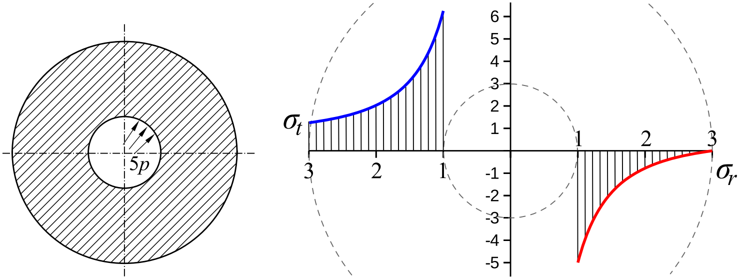
Porównać rozkłady naprężeń w dwóch wariantach cylindra grubościennego obciążonego ciśnieniem wewnętrznym $4p$. Pierwszy wariant (Fig. a) wykonany jest jako pojedyncza rura. Drugi wariant (Fig. b) składa się z dwóch rur połączonych skurczowo. Zakłada się, że ciśnienie pomiędzy rurami w wyniku połączenia skurczowego wynosi $p$.



# Zastosowanie zagadnienia Lame'go

## Przykład 2 – rozwiązanie

- rozkład naprężeń po przyłożeniu obciążenia roboczego w wariancie pojedynczej rury

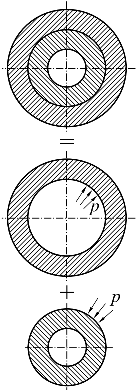


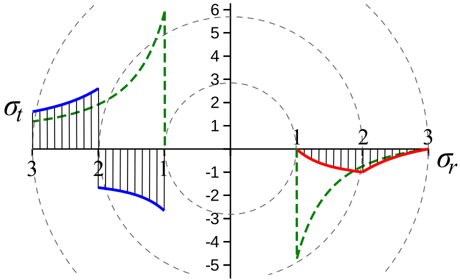

pojedyncza rura

# Zastosowanie zagadnienia Lame'go

## Przykład 2 – rozwiązanie

- rozkład naprężeń po wykonaniu połączenia skurczowego w rurze kompozytowej

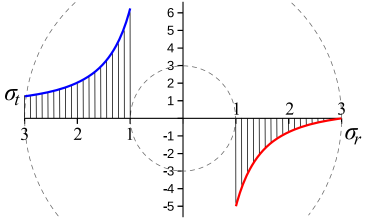


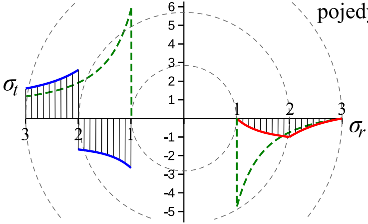

złożenie (naprężenia skurczowe)

# Zastosowanie zagadnienia Lame'go

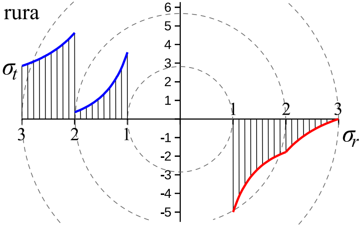
## Przykład 2 – rozwiązanie




pojedyncza rura




złożenie (naprężenia skurczowe)




złożenie (naprężenia całkowite)

# Plan wykładu

# Zastosowania

Typowe zastosowania krążków wirujących to:

- koła zamachowe
- tarcze hamulcowe
- koła pasowe
- wirniki turbin

# Założenia do analizy naprężeń

Naprężenia w krążkach wirujących analizuje się podobnie jak w rurach grubościennych. Różnicą jest to, że:

- dysk ma skończoną grubość, którą należy wziąć pod uwagę w czasie analizy
- grubość ta może być zmienna z promieniem dysku
- obciążenie jest generowane przez siły odśrodkowe związane z wirującą masą

# Założenia do analizy naprężeń

Przyjmiemy następujące założenia:

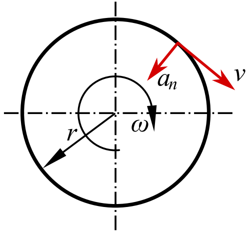
- dysk wykonany jest z jednorodnego materiału podlegającemu prawu Hooke'a,
- dysk jest osiowo symetryczny, a płaszczyzna symetrii jest prostopadła do osi obrotu,
- grubość dysku jest względnie mała.

Ponadto założymy, że dysk jest w dwuosiowym stanie naprężeń, którego składowe to obciążenia promieniowe $\sigma_r$ i naprężenia obwodowe $\sigma_t$. Obie składowe są funkcjami promienia $r$ i prędkości kątowej $\omega$.

# Założenia do analizy naprężeń

Przyjmujemy następujące parametry:

- promień dysku $r$
- prędkość kątowa $\omega$
- przyspieszenie odśrodkowe $a_n$

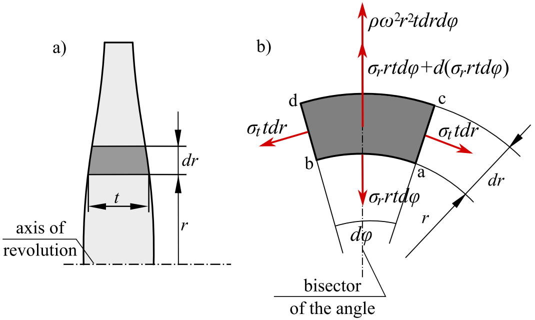



Są one ze sobą powiązane następującą zależnością:

$$a_n = \omega^2 r.$$

# Równowaga elementarnego wycinka dysku

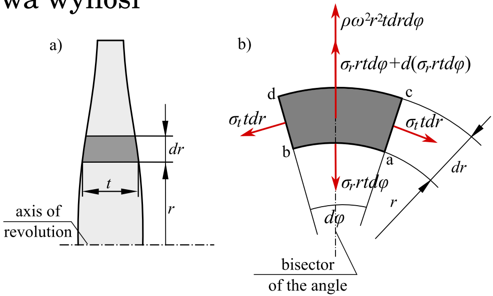
- analizę przeprowadzimy dla nieskończenie małego wycinka o grubości $dr$ wyciętego z dysku w odległości $r$ od osi obrotu; wycinek jest ograniczony kątem $d\varphi$
- na ścianki elementu działają cztery siły wynikające z naprężeń



# Równowaga elementarnego wycinka dysku

- dodatkowo na element działa siła bezwładności $F_b$, która wynika z przyspieszenia odśrodkowego i masy $F_b = ma_n$
- przyspieszenie jest zdefiniowane jako $a_n = \omega^2 r$
- masa jest iloczynem gęstości materiału $\rho$ i objętości elementu $V$ i zdefiniowana jako $V = rd\varphi drt$
- zatem siła odśrodkowa wynosi

$$F_b = \rho\omega^2 r^2 trdrd\varphi$$



# Równowaga elementarnego wycinka dysku

- równanie równowagi otrzymamy poprzez zsumowanie rzutów wszystkich sił na dwusieczną kąta $d\varphi$
- po uporządkowaniu i podzieleniu przez $drd\varphi$ równanie przyjmie następującą formę

$$\frac{d}{dr}(\sigma_r tr) - \sigma_t t + \rho\omega^2 r^2 t = 0$$

- przerwszy składnik można zapisać jako

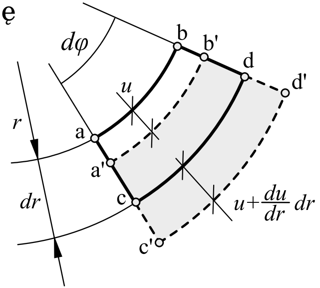
$$\frac{d}{dr}(\sigma_r tr) = \frac{d}{dr}(\sigma_r t)r + \sigma_r t\frac{dr}{dr}$$

- podstawiają powyższe do poprzedniego równania i dzieląc wszystko przez $t$ otrzymamy

$$\frac{r}{t}\frac{d}{dr}(\sigma_r t) + \sigma_r - \sigma_t + \rho\omega^2 r^2 = 0$$

# Deformacja elementarnego wycinka dysku

- analizując równowagę elementarnego wycinka dysku, otrzymaliśmy tylko jedno równanie równowagi zawierające dwie nieznane funkcje:
  - naprężenia promieniowe $\sigma_r$
  - naprężenia obwodowe $\sigma_t$
- aby otrzymać dodatkowe równanie, należy przeanalizować deformację elementu



# Prawo Hooke'a

- analiza deformacji pozwala zdefiniować odkształcenia

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr} \quad \text{and} \quad \varepsilon_t = \frac{u}{r}$$

- naprężenia i odkształcenia są powiązane prawem Hooke'a

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_r + \nu\varepsilon_t\right)$$

$$\sigma_t = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_t + \nu\varepsilon_r\right)$$

# Prawo Hooke'a

- w ten sposób obie składowe naprężeń można zapisać jako funkcje przemieszczenia $u$

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{du}{dr} + \nu\frac{u}{r}\right)$$
$$\sigma_t = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{u}{r} + \nu\frac{du}{dr}\right)$$

- podstawiając powyższe do równania równowagi otrzymujemy równanie różniczkowe z jedną zmienną $u$

# Równanie równowagi

- równanie równowagi przyjmuje ostatecznie postać

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{t}\frac{dt}{dr}\right)\frac{du}{dr} + \frac{1}{r}\left(\frac{\nu}{t}\frac{dt}{dr} - \frac{1}{r}\right)u = Ar$$

gdzie $A$ jest stałą opisującą materiał i ruch

$$A = -\frac{1-\nu^2}{E}\rho\omega^2$$

- ponieważ otrzymane rónanie ma postać ogólną, wygodnie jest rozwiązać je dla wybranego przypadku.

# Dysk pełny o stałej grubości

- jednym z możliwych rozwiązań równania jest takie, dla którego grubość dysku $t$ jest stała wzdłuż całego promienia
- jeśli założy się, że $t = const.$ wtedy pochodna $dt/dr$ będzie równa zeru; równianie przyjmie postać

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = Ar$$

lub

$$\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(ur)\right] = Ar$$

# Dysk pełny o stałej grubości

- rozwiązanie ma postać

$$u = \frac{r^3}{8}A + \frac{r}{2}C_1 + \frac{1}{r}C_2$$

- a składowe naprężeń

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{(3+\nu)}{8}Ar^2 + \frac{1+\nu}{2}C_1 - \frac{1-\nu}{r^2}C_2\right)$$

$$\sigma_t = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{(3+\nu)}{8}Ar^2 + \frac{1+\nu}{2}C_1 + \frac{1-\nu}{r^2}C_2\right)$$

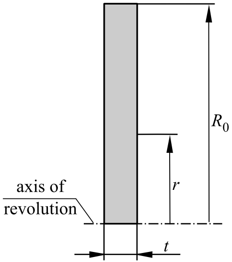
# Dysk pełny o stałej grubości

Przyjęto następujące warunki brzegowe

- dla $r = 0$ $u = 0$ co oznacza, że oś dysku nie przemieszcza się
- dla $r = R_0$ $\sigma_r = 0$ co oznacza, że zewnętrzna powierzchnia dysku jest wolna od naprężeń promieniowych

Stałe przyjmują postać

- $C_2 = 0$
- $C_1 = \dfrac{3+\nu}{4(1+\nu)} \dfrac{1-\nu^2}{E} \rho\omega^2 R_0^2$



# Dysk pełny o stałej grubości

Składowe naprężeń przyjmują postać

$$\sigma_r = \frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2\left(R_0^2 - r^2\right)$$

$$\sigma_t = \frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2\left(R_0^2 - \frac{1+3\nu}{3+\nu}r^2\right)$$

Powyższe równania pozwalają wyznaczyć wartości składowych naprężeń wzdłuż promienia dysku. Wartości te zależą od prędkości obrotowej oraz gęstości materiału. Nie zależą od grubości dysku.

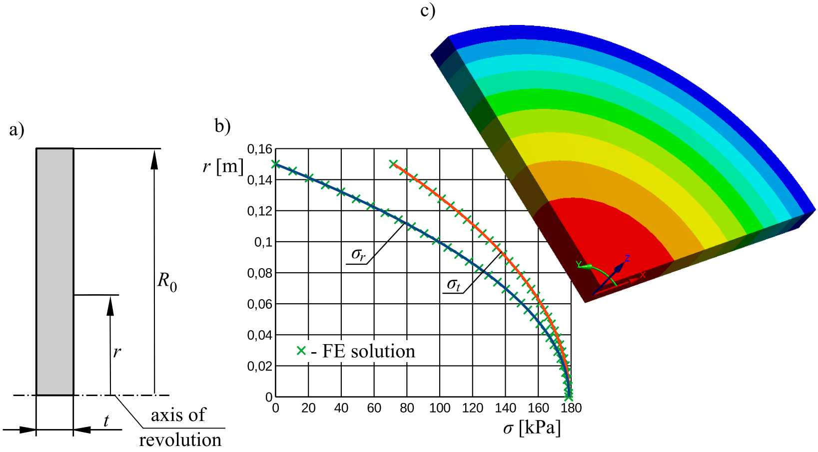
# Dysk pełny o stałej grubości

## Przykład 1

Wyznaczyć naprężenia promieniowe i obwodowe dla aluminiowego dysku o średnicy 300 mm i grubości równej 20 mm. Dysk obraca się z prędkością 800 obr/min.

# Dysk pełny o stałej grubości

## Przykład 1 – rozwiązanie



# Dysk pełny o stałej wytrzymałości

- inne praktyczne rozwiązanie równania równowagi można otrzymać, jeśli założy się, że $\sigma_r = \sigma_t = \sigma = const$.
- w ten sposób otrzymuje się dysk o stałej wytrzymałości – w każdym punkcie dysku obie składowe naprężeń mają taką samą wartość.
- równanie równowagi ma postać

$$\frac{r}{t}\frac{d}{dr}(\sigma_r t) + \sigma_r - \sigma_t + \rho\omega^2 r^2 = 0$$

- zakładają równe naprężenia mamy

$$\sigma \frac{r}{t}\frac{dt}{dr} + \rho\omega^2 r^2 = 0$$

# Dysk pełny o stałej wytrzymałości

- rozwiązanie tego równania dla $t$ daje

$$t = Ce^{-\dfrac{\rho\omega^2 r^2}{2\sigma}}$$

- stała $C$ może zostać wyznacznona z warunków brzegowych
- założmy, że grubosć dysku w osi obrogu będzie miała grubość $t_0$
- warunek brzegowy ma zatem postać: dla $r = 0$ $t = t_0$
- z powyższego równiania otrzymamy $C = t_0$, a wyrażenie na grubość dysku przyjmie postać

$$t = t_0 e^{-\dfrac{\rho\omega^2 r^2}{2\sigma}}$$

# Dysk pełny o stałej wytrzymałości

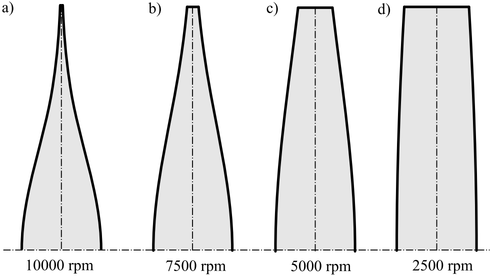
## Przykład 1

Wyznaczyć kształt dysku pełnego o średnicy 300 mm wykonanego z aluminium, który w osi ma grubość równą 20 mm. Przyjąć, że obie składowe naprężeń mają wartość równą 10 MPa. Wykonać obliczenia dla czterech różnych prędkości obrotowych: 2500, 5000, 7500 and 10000 obr/min.

# Dysk pełny o stałej wytrzymałości

## Przykład 1 – rozwiązanie

Przekroje poprzeczne dysków o stałej wytrzymałości dla różnych prędkości obrotowych



# Dysk pełny o stałej wytrzymałości

## Przykład 1 – rozwiązanie

rozwiązanie MES dla 10000 obr/min