

Wytrzymałość Konstrukcji Mechanicznych

Metody energetyczne w mechanice Stateczność konstrukcji

dr hab. inż. Paweł JASION

e-mail: `pawel.jasion@put.poznan.pl`

www: `pawel.jasion.pracownik.put.poznan.pl`

Politechnika Poznańska
Instytut Mechaniki Stosowanej
Zakład Wytrzymałości Materiałów i Konstrukcji

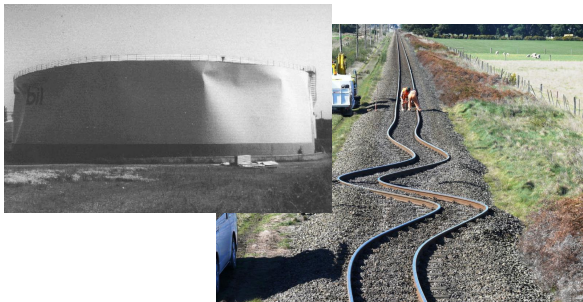
- 1 Zjawisko utraty stateczności
- 2 Błonowy stan naprężeń
- 3 Analiza stateczności konstrukcji
- 4 Zasada stacjonarności całkowitej energii potencjalnej

Plan wykładu

- 1 Zjawisko utraty stateczności
- 2 Błonowy stan naprężeń
- 3 Analiza stateczności konstrukcji
- 4 Zasada stacjonarności całkowitej energii potencjalnej

Przykłady utraty stateczności

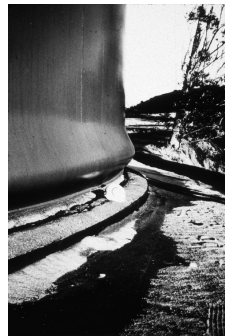
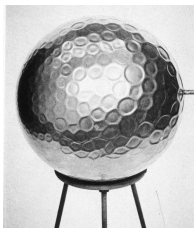
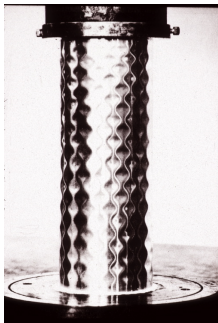
- jednym z kryteriów definiujących niezawodność konstrukcji jest stateczność
- utracić stateczność mogą konstrukcje smukłe i cienkościenne



Konstrukcje powłokowe

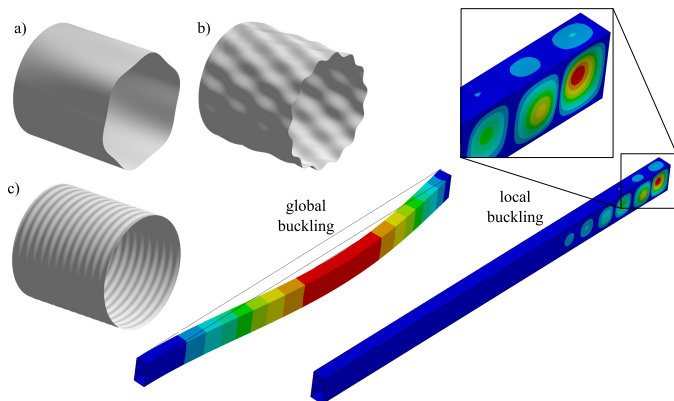


Przykłady utraty stateczności



Charakter utraty stateczności

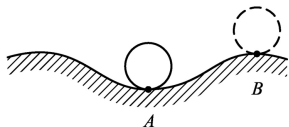
- postać wyboczenia ma zwykle kształt jednej lub wielu fal
- wyboczenie może mieć charakter globalny lub lokalny



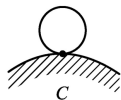
Rodzaje równowagi

- w mechanice analizujemy obiekty znajdujące się w równowadze; nie zastanawiamy się jednak, jaki jest charakter tej równowagi – nie badamy stateczności
- stateczność można rozumieć jako odpowiedź systemu na zaburzenia zewnętrzne

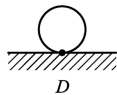
Położenie równowagi systemu jest stateczne, jeśli dowolnie małe wymuszenie wywołuje małe wychylenie systemu z tego stanu.



równowaga stateczna



równowaga niestateczna



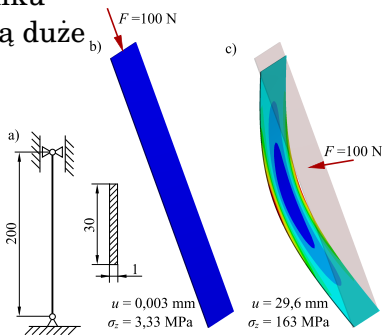
równowaga obojętna

Plan wykładu

- 1 Zjawisko utraty stateczności
- 2 Błonowy stan naprężeń**
- 3 Analiza stateczności konstrukcji
- 4 Zasada stacjonarności całkowitej energii potencjalnej

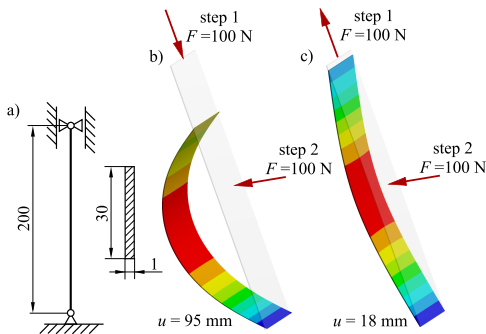
Błonowy stan naprężeń

- konstrukcje smukłe i cienkościennie przenoszą obciążenia poprzez siły błonowe
- odkształcenia przy tak rozłożonych siłach są bardzo małe
- jednak odkształcenia w wyniku działania sił poprzecznych są duże
- zatem konstrukcje smukłe i cienkościennie wykazują dużą sztywność błonową i małą sztywność giętą



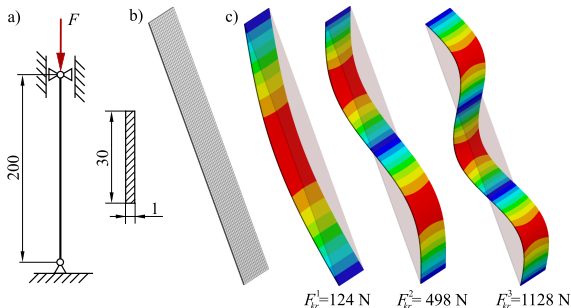
Błonowy stan naprężeń

- siły błonowe wpływają na sztywność giętą konstrukcji w dwojaki sposób
 - siły rozciągające usztywniają konstrukcję (*stress stiffening*)
 - siły ściskające zmniejszają sztywność konstrukcji



Błonowy stan naprężeń

- w skrajnym przypadku ściskające siły błonowe mogą być tak duże, że sztywność konstrukcji maleje do zera; wtedy, po przyłożeniu niewielkiej siły (zaburzenia) lub nawet bez dodatkowej siły dochodzi do ugięcia konstrukcji – konstrukcja traci stateczność



Błonowy stan naprężeń

- zjawisko utraty stateczności można wytłumaczyć przy pomocy podejścia energetycznego
- obciążenie przyłożone do konstrukcji wywołuje jej przemieszczenie; wykonuje zatem pracę, która jest zamieniana na energię odkształcenia postaciowego

$$W_e = \frac{1}{2}F\Delta l; \quad U_\varepsilon = \frac{F^2 l}{2EA}$$

- ponieważ siły błonowe są duże, duża jest również energia odkształcenia

Błonowy stan naprężeń

- w momencie utraty stateczności następuje samoistna zamiana energii odkształcenia stanu błonowego w energię odkształcenia stanu zgięciowego
- ponieważ sztywność zgięciowa jest dużo mniejsza, aby zaabsorbować całą energię potrzebne jest duże ugięcie
- ilość energii pozostaje taka sama (poza niewielkimi stratami) ale odpowiada jej inna konfiguracja geometryczna
- zwykle prowadzi to do zniszczenia konstrukcji

Plan wykładu

- 1 Zjawisko utraty stateczności
- 2 Błonowy stan naprężeń
- 3 Analiza stateczności konstrukcji**
- 4 Zasada stacjonarności całkowitej energii potencjalnej

Analiza konstrukcji

Chcąc w pełni poznać cechy konstrukcji należy zbadać jej zachowanie w trzech fazach

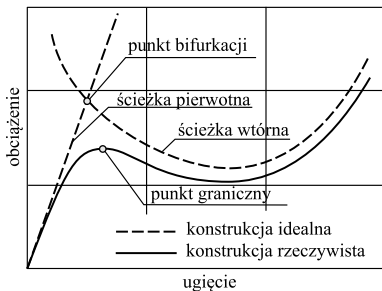
- faza dokrytyczna
 - wyznaczamy stan odkształceń i naprężeń
- stan krytyczny
 - wyznaczamy postać wyboczenia i obciążenie krytyczne
- faza zakrytyczna
 - opisujemy zachowanie się konstrukcji po utracie stateczności; zwykle proces zniszczenia

Typy utraty stateczności

Ścieżka równowagi

Ścieżka równowagi

zależność między przemieszczeniem wybranego punktu konstrukcji a obciążeniem

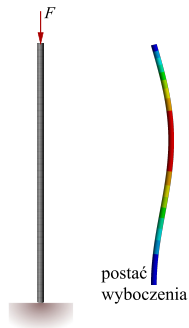
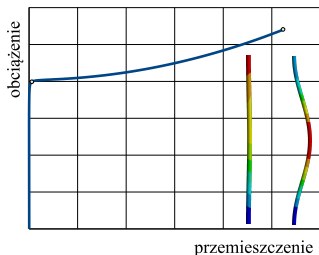


Typy utraty stateczności

Ścieżka równowagi

W zależności od analizowanego problemu można otrzymać różne ścieżki równowagi:

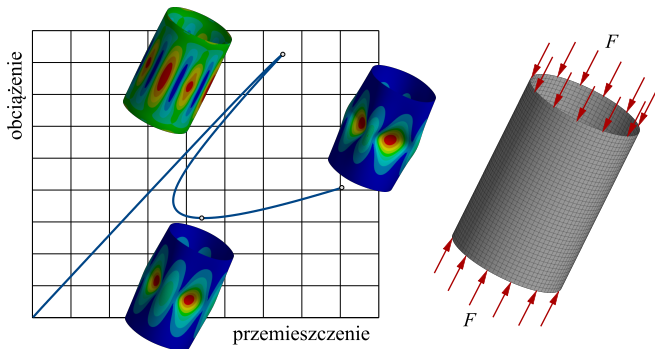
- pręt ściskany osiowo
 - stateczna ścieżka równowagi – po przekroczeniu obciążenia krytycznego dalsze zwiększanie ugięcia wymaga zwiększenia obciążenia



Typy utraty stateczności

Ścieżka równowagi

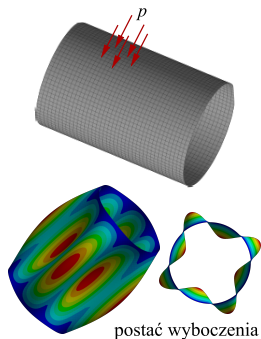
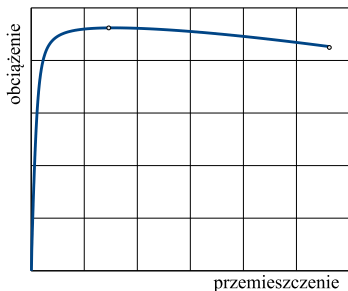
- powłoka walcowa ściskana osiowo
 - niestateczna ścieżka równowagi – po osiągnięciu obciążenia krytycznego następuje gwałtowny spadek siły



Typy utraty stateczności

Ścieżka równowagi

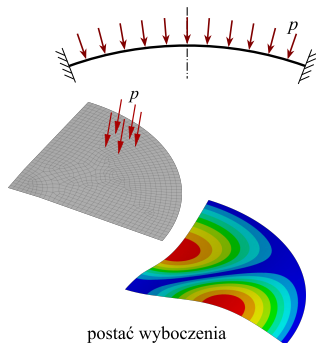
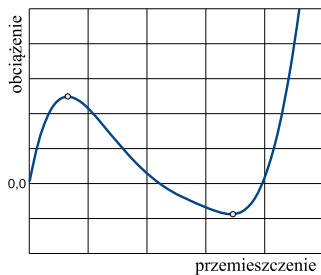
- powłoka walcowa obciążona ciśnieniem zewnętrznym
 - niestateczna ścieżka równowagi – po osiągnięciu obciążenia krytycznego zwiększenie przemieszczenia następuje przy mniejszym obciążeniu



Typy utraty stateczności

Ścieżka równowagi

- czasza sferyczna obciążona ciśnieniem
 - niestateczna ścieżka równowagi; widoczny jest przeskok – aby utrzymać przemieszczenie należy przyłożyć siłę ujemną



Plan wykładu

- 1 Zjawisko utraty stateczności
- 2 Błonowy stan naprężeń
- 3 Analiza stateczności konstrukcji
- 4 Zasada stacjonarności całkowitej energii potencjalnej

Równowaga układu

- stateczność konstrukcji związana jest z jej całkowitą energią potencjalną, definiowaną jako

$$V = U_{\varepsilon} - W$$

gdzie: U_{ε} jest energią odkształcenia sprężystego,
a W jest pracą sił zewnętrznych

- badając stateczność, analizujemy wpływ parametrów opisujących położenie konstrukcji – przemieszczenie, kąt obrotu – na wartość tej energii

Równowaga układu

- konstrukcja będzie w równowadze, jeżeli jej energia całkowita osiągnie wartość ekstremalną
- ponieważ zmianę energii wywołaną zmianą parametru opisujemy poprzez pochodną, możemy zapisać

$$\frac{\partial V}{\partial \delta} = 0$$

gdzie δ jest współrzędną uogólnioną (przemieszczenie, kąt obrotu)

- warunkiem koniecznym równowagi jest zerowanie się pierwszej pochodnej

$$\frac{\partial V}{\partial \delta} = 0$$

- jednak, jeśli chcemy określić charakter równowagi, to musimy zbadać wartość drugiej pochodnej; zatem:

- dla równowagi statecznej

$$\frac{\partial V}{\partial \delta} = 0 \quad \text{oraz} \quad \frac{\partial^2 V}{\partial \delta^2} > 0$$

- dla równowagi niestatecznej

$$\frac{\partial V}{\partial \delta} = 0 \quad \text{oraz} \quad \frac{\partial^2 V}{\partial \delta^2} < 0$$

- dla równowagi obojętnej

$$\frac{\partial V}{\partial \delta} = 0 \quad \text{oraz} \quad \frac{\partial^2 V}{\partial \delta^2} = 0$$

Zasada stacjonarności całkowitej energii potencjalnej

Całkowita energia potencjalna układu V

$$V = U_{\varepsilon} - W$$

Twierdzenie Lagrange'a-Dirichlet'a

jeżeli całkowita energia potencjalna układu znajdującego się w równowadze osiąga minimum, to równowaga ta jest stateczna

Zasada stacjonarności całkowitej energii potencjalnej

$$\delta(U_{\varepsilon} - W) = 0$$

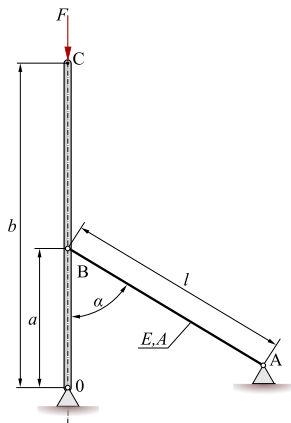
Równowaga układu

- zasada stacjonarności mówi, że pierwsza wariacja z energii całkowitej musi być równa zero $\delta(V) = 0$; jest to warunek wystarczający do określenia stanu krytycznego – stanu równowagi
- jeśli zależy nam na zbadaniu, czy równowaga ta jest stateczna czy nie, musimy sprawdzić dodatkowe warunki
 - jeżeli $\delta^2(V) < 0$, to równowaga jest niestateczna,
 - jeżeli $\delta^2(V) > 0$, to równowaga jest stateczna,
 - jeżeli $\delta^2(V) = 0$, to równowaga jest obojętna.

Stateczność konstrukcji

Przykład 1 [Magnucki, Szyc, 2000]

Sztywna kolumna OC obciążona jest siłą F i połączona przegubowo z odkształcalnym prętem AB. Wyznaczyć wartość siły krytycznej dla przedstawionego układu.



Metody energetyczne w analizie stateczności

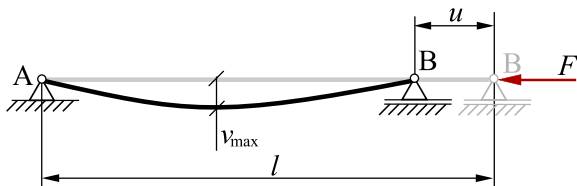
Aby rozwiązać problem stateczności metodami energetycznymi, czyli otrzymać równanie równowagi, należy wykonać następujące kroki:

- zdefiniować pole przemieszczeń: $u = u(x)$
- opisać odkształcenia: $\varepsilon = du/dx$
- opisać naprężenia z wykorzystaniem prawa Hooke'a:
 $\sigma = E\varepsilon$
- zdefiniować energię odkształcenia postaciowego: U_ε
- zdefiniować pracę obciążenia: W

Stateczność konstrukcji

Przykład 2

Wyznaczyć wartość siły krytycznej F dla osiowo obciążonej belce o sztywności EI .



- 1 Magnucki K., Szyc W. *Wytrzymałość materiałów w zadaniach. Pręty, płyty i powłoki obrotowe*, PWN, Warszawa, 200