Wytrzymałość Materiałów II

Zginanie – zagadnienia złożone

opracował:
dr hab. inż. Paweł JASION
e-mail: pawel.jasion@put.poznan.pl
www: pawel.jasion.pracownik.put.poznan.pl

Politechnika Poznańska
Instytut Mechaniki Stosowanej
Zakład Wytrzymałości Materiałów i Konstrukcji

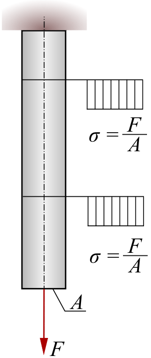
Plan wykładu

1. Zagadnienia złożone
   - Belki z siłą osiową
   - Zginanie ukośne

Plan wykładu

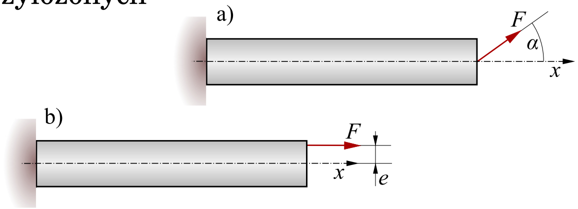
Belki z obciążeniem osiowym

- w przypadku osiowego rozciągania zakładaliśmy, że siła przyłożona jest w osi pręta i działa wzdłuż tej osi
- dzięki temu na całej długości pręta naprężenia były takie same, a ich rozkład był równomierny na całym przekroju poprzecznym
- co się jednak stanie, jeśli warunek osiowości nie będzie spełniony?



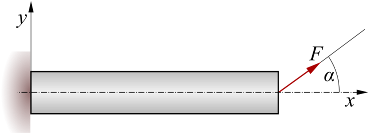
Belki z obciążeniem osiowym

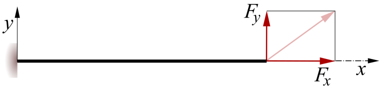
- w takim przypadku będziemy mieli do czynienia z belką zginaną, obciążoną dodatkowo siłą osiową
- możliwe są dwa przypadki prowadzące do takiej sytuacji
  - siła rozciągająca przyłożona w osi, ale obrócona o kąt α (a)
  - siła działająca wzdłuż osi pręta, ale przyłożona mimośrodowo, z mimośrodem e (b)
- w obu przypadkach model obciążenia będzie się składał z dwóch sił przyłożonych w osi pręta



Belki z obciążeniem osiowym

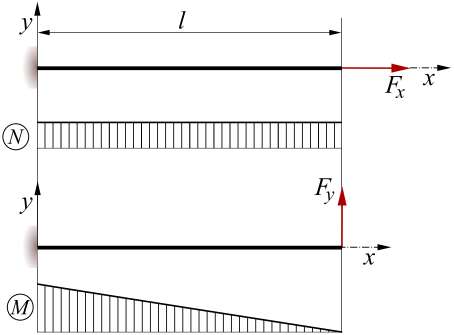
- rozpatrzmy pierwszy przypadek; siła obciążajaca rozkłada się na dwie składowe
  - poziomą $F_x = F\cos\alpha$
  - pionową $F_y = F\sin\alpha$
- mamy zatem do czynienia ze złożonym stanem obciążeń; pręt obciążony jest
  - momentem gnącym M generowanym przez siłę poprzeczną F_y
  - oraz siłą rozciągająca N generowaną przez siłę normalną F_x





Belki z obciążeniem osiowym

- oba obciążenia możemy rozpatrzyć osobno i przygotować dla nich wykresy sił wewnętrznych
- w dowolnym przekroju belki, oddalonym o x od jej lewego końca, działają dwie siły wewnętrzne
  - normalna $N = F \cos \alpha$
  - moment gnący $M = F \sin \alpha \, x$
- obie te siły generują naprężenia normalne
  - $\sigma_N = \dfrac{N}{A}$
  - $\sigma_M = \dfrac{My}{I}$



Belki z obciążeniem osiowym

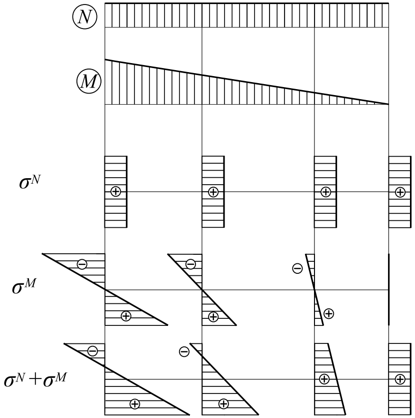
- naprężenia normalne, pochodzące od różnych składowych obciążeń, można do siebie dodawać
- mamy więc

$$\sigma = \sigma_N + \sigma_M = \frac{N}{A} \pm \frac{My}{I}$$

- należy uważać na znaki poszczególnych składowych; w tym przypadku naprężenie normalne jest dodatnie, ponieważ siła normalna jest rozciągająca; natomiast naprężenia gnące zawsze są dodatnie na jednej powierzchni zewnętrznej i ujemne na drugiej; znak należy ustalić analizując ugięcie belki

Belki z obciążeniem osiowym

- zobaczmy, jak będą wyglądały rozkłady naprężeń dla wybranych przekroi belki



Belki z obciążeniem osiowym

- widać, że naprężenia od siły normalnej są takie same dla każdego przekroju
- naprężenia od zginania wzrastają od zerowych dla $x = 0$ do maksymalnych dla $x = l$
- rozkład naprężeń całkowitych jest sumą geometryczną obu składowych naprężeń
- rozkład ten pochyla się coraz bardziej w miarę, jak wzrasta moment gnący
- w dolnej części belki naprężenia są cały czas dodatnie, natomiast w górnej wartość naprężeń zaczyna maleć, a przy podporze mają już znak ujemy
- to, czy naprężenia zmienią znak na ujemny zależy od proporcji naprężeń od rozciągania i zginania

Belki z obciążeniem osiowym

- analiza wytrzymałości pręta w złożonym stanie obciążeń polega na znalezieniu przekroju, w którym sumaryczne naprężenia są największe i dla tego przekroju zapisuje się warunek wytrzymałościowy
- w tym przypadku największe naprężenia pojawią się przy podporze i będą to naprężenia rozciągające w dolnej części belki
- przyjmijmy, że pręt ma przekrój prostokątny o wysokości h i szerokości b
- naprężenia będą zatem miały wartość

$$\sigma = \sigma_N + \sigma_M = \frac{N}{A} + \frac{My}{I} = \frac{F\cos\alpha}{bh} + \frac{F\sin\alpha l \dfrac{h}{2}}{\dfrac{bh^3}{12}}$$

Belki z obciążeniem osiowym

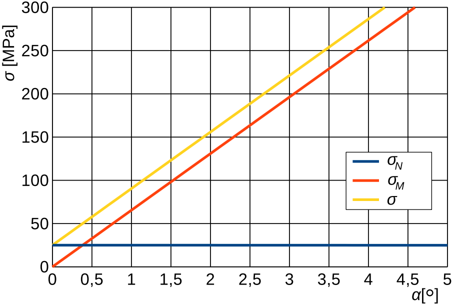
- ostatecznie otrzymujemy

$$\sigma = \frac{F\cos\alpha}{bh} + \frac{6F\sin\alpha l}{bh^2}$$

- wstawiając w powyższym wyrażeniu „$-$” zamiast „$+$” otrzymamy wartość naprężeń na górnej powierzchni belki
- widać, że podstawiają $\alpha = 0^\circ$ otrzymamy zależność na naprężenia przy czystym rozciąganiu; natomiast, gdy $\alpha = 90^\circ$ mamy do czynienia ze zginaniem
- aby zbadać wpływ kąta α na wartość naprężeń przeliczmy prosty przykład

Belki z obciążeniem osiowym

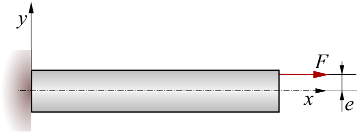
- przyjmijmy następujące wartości liczbowe
  - $F = 15$ [kN]
  - $l = 500$ [mm]
  - $b = 30$ [mm]
  - $h = 20$ [mm]

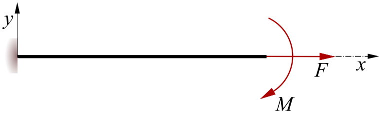


- z wykresu widać, że naprężenia równe 25 MPa dla czystego rozciągania, zwiększą się do 276 MPa, jeżeli siła obróci się zaledwie o 4°
- jest to dowód na to, jak ważna jest dokładność montażu lub z innej strony jak ważne jest dobranie właściwego współczynnika bezpieczeństwa

Belki z obciążeniem osiowym

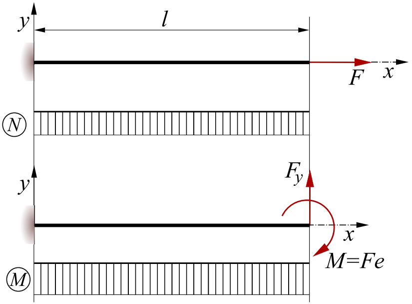
- rozpatrzmy drugi przypadek; siła przyłożona mimośrodowo jest równoważna
  - sile rozciągającej F
  - momentowi gnącemu $M = Fe$
- zatem tu również mamy czynienia ze złożonym staniem obciążeń





Belki z obciążeniem osiowym

- oba obciążenia możemy rozpatrzyć osobno i przygotować dla nich wykresy sił wewnętrznych
- w tym przypadku obie siły są stałe na całej długości belki
  - normalna $N = F$
  - moment gnący $M = Fe$
- obie te siły generują naprężenia normalne
  - $\sigma_N = \dfrac{N}{A} = \dfrac{F}{A}$
  - $\sigma_M = \dfrac{My}{I} = \dfrac{Fey}{I}$

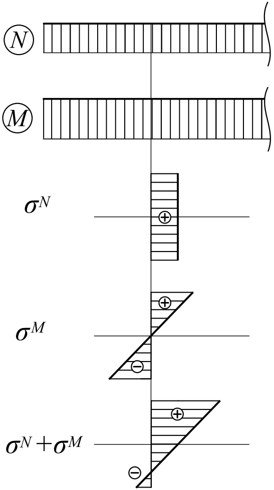


Belki z obciążeniem osiowym

- ponieważ obie siły wewnętrzne są stałe na długości belki, rozkład naprężeń na przekroju będzie taki sam dla każdego punku belki – dla każdego x
- wartość naprężeń to

$$\sigma = \sigma_N + \sigma_M = \frac{F}{A} \pm \frac{Fey}{I}$$

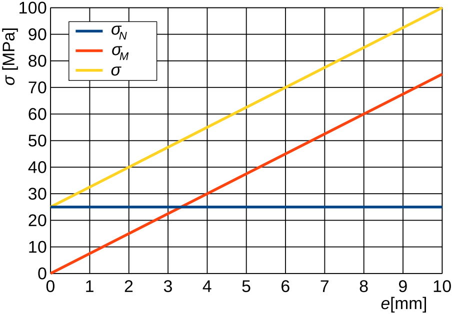
- znak plus odpowiada naprężeniom maksymalnym (na górnej powierzchni); znak minus naprężeniom na dolnej powierzchni



Belki z obciążeniem osiowym

- sprawdźmy, jak mimośród wpływa na zmianę wartości naprężeń; dane takie same jak poprzednio
  - $F = 15$ [kN]
  - $l = 500$ [mm]
  - $b = 30$ [mm]
  - $h = 20$ [mm]
- wartość naprężeń wyznaczymy z zależności

$$\sigma = \frac{F}{bh} + \frac{6Fe}{bh^2}$$



- widać, że przesunięcie siły na krawędź belki zwiększy naprężenia z 25 do 100 MPa

Belki z obciążeniem osiowym

- w zależności od proporcji obu składników naprężenia w pręcie może pojawić się płaszczyzna obojętna
- jej położenie można wyznaczyć przyrównując wyrażenie na naprężeni do zera

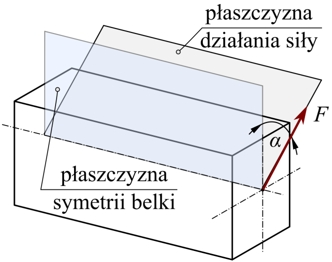
$$\frac{F}{bh} + \frac{12Fey}{bh^3} = 0 \quad \rightarrow \quad y = -\frac{h^2}{12e}$$

- dla naszego przykładu, jeśli siłę przyłożymy do krawędzi przekroju, $e = 10$ mm, oś obojętna będzie położona 3,3 mm poniżej osi pręta

Plan wykładu

Zginanie ukośne

- do tej pory rozpatrywaliśmy belki w stanie płaskiego zginania
- oznacza to, że wszystkie siły poprzeczne przyłożone były w jednej płaszczyźnie a wektory momentów w płaszczyźnie do niej prostopadłej
- w tej samej płaszczyźnie następowało ugięcie belki; była to płaszczyzna symetrii
- teraz rozpatrzymy przypadek, gdy siła obciążająca przyłożona jest w płaszczyźnie nachylonej do płaszczyzny symetrii belki pod kątem α

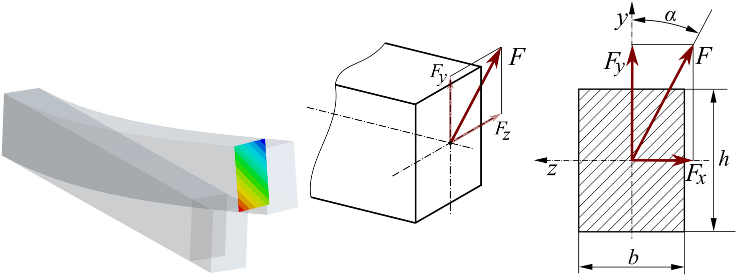


Zginanie ukośne

- obciążenie takie pojawia się w przypadku, gdy belka jest obrócona, a obciążenie wynika z siły grawitacji (konstrukcja dachu) lub gdy obciążenie może zmieniać swój kierunek (wahające się obciążenie suwnicy)

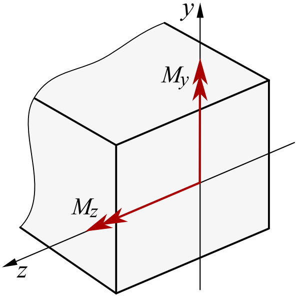
Zginanie ukośne

- jeśli siła zginająca nie leży w płaszczyźnie symetrii belki, mamy do czynienia ze zginaniem ukośnym
- jak łatwo zauważyć, zginanie ukośne to superpozycja dwóch przypadków zginania płaskiego, pojawiających się w dwóch wzajemnie prostopadłych płaszczyznach



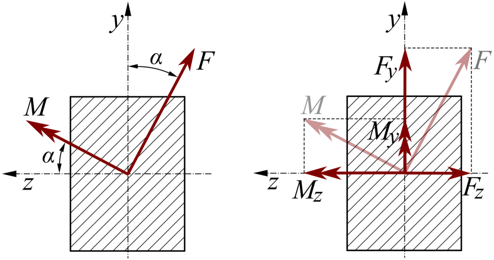
Zginanie ukośne

- zanim zaczniemy analizę zagadnienia przypomnijmy konwencję znaków
- dodatni znak momentu określamy korzystając z reguły prawej dłoni – kciuk wskazuje kierunek wektora, a zgięte palce kierunek obracania się przekroju



Zginanie ukośne

- wektor momentu M jest prostopadły do wektora siły F
- każde ze składowych siły F wywoła moment składowy momentu M
- na końcu belki będziemy mieli
  - $M_y = F_z l$
  - $M_z = F_y l$



Zginanie ukośne

- zadanie jakie przed nami stoi polega na
  - znalezieniu zależności pozwalającej wyznaczyć wartości naprężeń w przypadku zginania ukośnego
  - znalezieniu położenia osi obojętnej
- w naszym przypadku naprężenia wypadkowe σ_x będą sumą naprężeń wywołanych momentem gnącym M_y i momentem M_z

$$\sigma_x = \sigma_x^{M_y} + \sigma_x^{M_z}$$

Zginanie ukośne

- spróbujmy zdefiniować naprężenia od poszczególnych momentów
- z zagadnienia zginania płaskiego wiemy, że naprężenia zginające wyraża się wzorem

$$\sigma = \frac{My}{I}$$

- można tą zależność wykorzystać, ponieważ mamy do czynienia z superpozycją dwóch zagadnień płaskich; należy jedynie uważać na indeksy

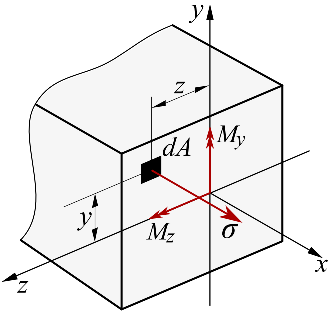
Zginanie ukośne

- naprężenia zdefiniujemy dla elementarnego wycinka dA
- naprężenia wywołane momentem M_y będą równe: moment M_y, pomnożony przez odległość od osi obojętnej, w tym przypadku osią jest oś y, więc odległość będzie równa z, podzielony przez moment bezwładności względem osi obojętnej, czyli I_y

$$\sigma_x^{M_y} = \frac{M_y z}{I_y}$$

- podobnie

$$\sigma_x^{M_z} = \frac{M_z y}{I_z}$$



Zginanie ukośne

- widać, że każdy z dwóch momentów może mieć znak dodatni lub ujemy w zależności od tego, w którym miejscu zdefiniowany jest wycinek dA
- w naszym przypadku będziemy mieli

$$\sigma_x = \frac{M_y z}{I_y} - \frac{M_z y}{I_z}$$

- od proporcji składowych naprężeń, czyli proporcji momentów, zależy położenie osi obojętnej
- dla $M_z = 0$ osią obojętną będzie oś y;
  dla $M_y = 0$ będzie to oś z

Zginanie ukośne

- oś obojętną znajduje się przyrównując do zera wyrażenie na naprężenia

$$\frac{M_y}{I_y}z - \frac{M_z}{I_z}y = 0$$

- otrzymujemy zatem

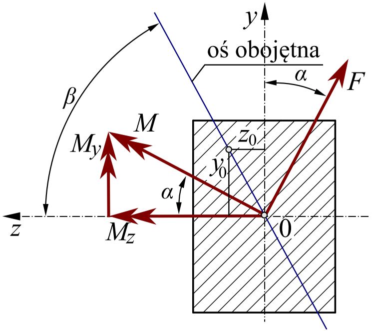
$$y = z\frac{M_y I_z}{M_z I_y} \tag{1}$$

- z równania widać, że oś obojętna przechodzi przez środek ciężkości przekroju; podstawiając $z = 0$ otrzymamy $y = 0$
- aby wyznaczyć oś obojętną wystarczy teraz wybrać drugi, dowolny punkt o współrzędnej z_0 i wyliczyć współrzędna y_0

Zginanie ukośne

- spróbujmy znaleźć zależność kątową między płaszczyzną działania siły F i płaszczyzną obojętną
- z równania (1) mamy

$$\frac{y_0}{z_0} = \frac{M_y I_z}{M_z I_y}$$



- z rysunku możemy odczytać, że

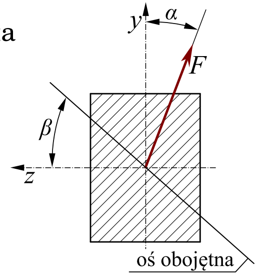
$$\frac{y_0}{z_0} = \mathrm{tg}\beta \text{ oraz } \frac{M_y}{M_z} = \mathrm{tg}\alpha$$

- otrzymujemy zatem zależność

$$\mathrm{tg}\beta = \frac{I_z}{I_y}\mathrm{tg}\alpha$$

Zginanie ukośne

- widać zatem, że płaszczyzna obojętna nie jest prostopadła do płaszczyzny działającej siły
- możemy też wskazać przypadki szczególne
  - dla $\alpha = 0^\circ$ lub $\alpha = 180^\circ$ oś z jest osią obojętną
  - dla $\alpha = \pm 90^\circ$ oś y jest osią obojętną
  - dla $I_z = I_y$ oba kąty są równe, czyli płaszczyzna obojętna jest prostopadła do płaszczyzny działającej siły; ma to miejsce np. dla przekroju kwadratowego



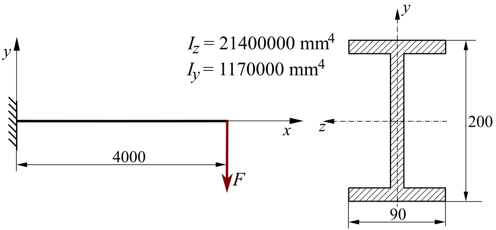
Zginanie ukośne

Przykład

Wyznaczyć wartość maksymalnych naprężeń w belce dwuteowej przy założeniu, że:

- oś y belki jest pionowa,
- oś y jest odchylona od pionu o kąt $\alpha = 1°$.

Wartość obciążenia przyjąć $F = 2$ kN. Momenty bezwładności przekroju odczytano z katalogu producenta i umieszczono na rysunku.



Zginanie ukośne

Przykład

- dla pierwszego wariantu, gdy oś y jest osią pionową wystarczy skorzystać z formuły dla płaskiego zginania

$$\sigma_{max} = \frac{M_{z_{max}} y}{I_z}$$

- aby znaleźć maksymalny moment gnący działający w belce należy przygotować wykres sił wewnętrznych
- w przypadku zginania pojawiają się dwie siły wewnętrzne – moment gnący M i siła poprzeczna T; tę drugą siłę pominiemy, ponieważ belka jest wystarczająco długa i wpływ siły poprzecznej można pominąć (*proponuję sprawdzić*)

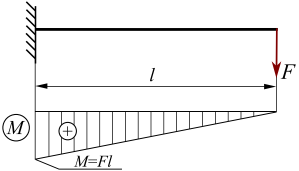
Zginanie ukośne

Przykład

- dla belki wspornikowej, obciążonej na końcu siłą poprzeczną, rozkład momentu gnącego ma kształt trójkąta; maksymalny moment pojawia się w utwierdzeniu i jest równy $M_{max} = Fl$
- mamy zatem

$$\sigma_{max} = \frac{Fly}{I_z} = \frac{2000\ \mathrm{N} \cdot 4000\ \mathrm{mm} \cdot 100\ \mathrm{mm}}{21400000\ \mathrm{mm}^4}$$

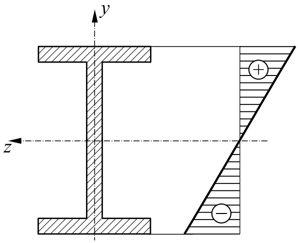
$$\sigma_{max} = 37,4\ \mathrm{MPa}$$



Zginanie ukośne

Przykład

- rozkład naprężeń na przekroju jest symetryczny, jak na przedstawionym rysunku
- naprężenia maksymalne pojawiają się na górnej i dolne powierzchni swobodnej belki
- ich wartości są takie same, inne są znaki: na górze są to naprężenia rozciągające (+), na dole ściskające (−)



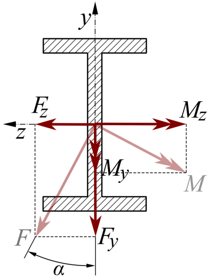
Zginanie ukośne

Przykład

- w drugim wariancie zadania oś pionowa belki jest obrócona o kąt α; rozwiążemy zadanie równoważne: siła obciążająca będzie obrócona o kąt α
- przeanalizujmy obciążenie działające na belkę; siła obciążająca rozdziela się na dwie składowe:
  - pionową $F_y = F\cos\alpha$ generującą moment M_z
  - poziomą $F_z = F\sin\alpha$ generującą moment M_y
- maksymalne wartości momentów, na końcu belki będą równe

$$M_z = F\cos\alpha l = 8000 \text{ Nm}$$

$$M_y = F\sin\alpha l = 140 \text{ Nm}$$



Zginanie ukośne
Przykład

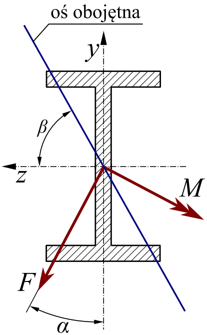
- znajdźmy położenie osi obojętnej; znając kąt odchylenia siły oraz momenty bezwładności możemy skorzystać z wyprowadzonej wcześniej zależności

$$\mathrm{tg}\beta = \frac{I_z}{I_y}\mathrm{tg}\alpha$$

$$\beta = \mathrm{atg}\left(\frac{I_z}{I_y}\mathrm{tg}\alpha\right)$$

$$\beta = \mathrm{atg}\left(\frac{21400000\mathrm{mm}^4}{1170000\mathrm{mm}^4}\mathrm{tg}(1^\circ)\right)$$

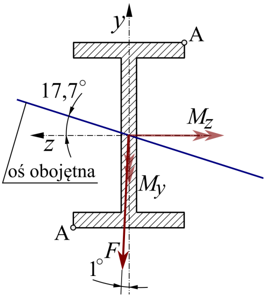
$$\beta = 17,7^\circ$$



Zginanie ukośne

Przykład

- ostatnim etapem będzie wyznaczenie wartości naprężeń maksymalnych
- wiemy, że wartości maksymalne pojawiają się w punktach najbardziej oddalonych od osi obojętnej
- w naszym przypadku będą to punkty A i B równo oddalone od osi; zatem naprężenia będą w nich takie same co do wartości, wyznaczmy naprężenia tylko w punkcie A
- współrzędne punku A to $y = 100$ mm i $z = 45$ mm



Zginanie ukośne

Przykład

- podstawiając wszystkie dane otrzymamy wartość naprężeń; należy pamiętać, aby oba składniki naprężeń wyrazić z odpowiednim znakiem, analizując zachowanie się belki
- w naszym przypadku, w punkcie A, zarówno naprężenia od momentu M_y jak i M_z będą dodatnie

$$\sigma_x = \frac{M_y z}{I_y} + \frac{M_z y}{I_z}$$

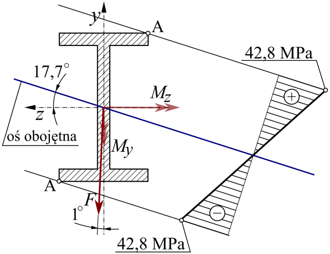
$$\sigma_x = \frac{140000\ \text{Nmm} \cdot 45\text{mm}}{1170000\ \text{mm}^4} + \frac{8000000\ \text{Nmm} \cdot 100\ \text{mm}}{21400000\ \text{mm}^4}$$

$$\sigma_x = 42,8\ \text{MPa}$$

Zginanie ukośne

Przykład

- pozostaje jedynie narysować wykres rozkładu naprężeń
- należy zauważyć, jakie konsekwencje miało obrócenie obciążenia (belki) o 1°
- po pierwsze, oś obojętna obróciła się aż o 17,7°
- po drugie, naprężenia maksymalne wzrosły z 37,4 MPa do 42,8 MPa, czyli o 14,4%



Zginanie ukośne

Przykład

- w przypadku zginania ukośnego wykres naprężeń przedstawia się często tak, aby było widoczne, jak naprężenia zmieniają się na poszczególnych ściankach; jest to rozłożenie obrazu 3D na płaszczyźnie