Wytrzymałość Materiałów II

Zginanie
Linia ugięcia belki – metoda Clebscha

opracował:
dr hab. inż. Paweł JASION
e-mail: pawel.jasion@put.poznan.pl
www: pawel.jasion.pracownik.put.poznan.pl

Politechnika Poznańska
Instytut Mechaniki Stosowanej
Zakład Wytrzymałości Materiałów i Konstrukcji

Plan wykładu

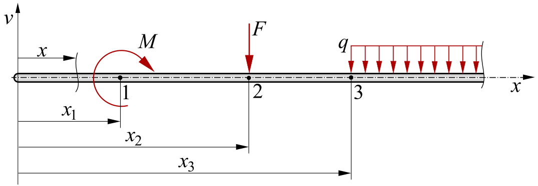
- Metoda Clebscha
- Belki statycznie niewyznaczalne
- Skrócenie belki
- Energia odkształcenia sprężystego

Równanie różniczkowe linii ugięcia belki

- moment gnący w dowolnym przekroju belki opisany jest równaniem

$$M(x) = EI\frac{d^2v}{dx^2}$$

- w każdym przedziale belki wieloprzedziałowej jest on inny, a rozwiązanie równania daje dwie stałe całkowania
- istnieje jednak sposób, aby zapisać jedno równanie, które będzie prawdziwe dla wszystkich przedziałów



Równanie różniczkowe linii ugięcia belki

- rozwiązanie zaproponował W.H Macaulay w:
  The Messenger of Mathematics, Vol. XLVIII, May 1918 – April 1919, Bowes & Bowes, Cambridge

NOTE ON THE DEFLECTION OF BEAMS.

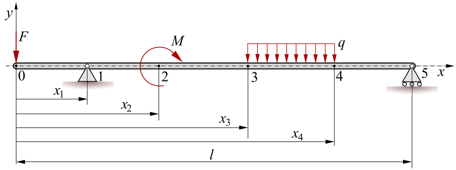
By *W. H. Macaulay, M.A.*

In the problem of a loaded beam, supported in any manner, it is assumed that the bending moment at any point of it is $EI\frac{d^2y}{dx^2}$, where x is the coordinate of the point measured from one end of the beam, y is the deflection, E is Young's modulus, and I depends on the section of the beam and may be either constant or a function of x. The equation

Równanie różniczkowe linii ugięcia belki

Metoda Clebscha

- linię ugięcia belek wieloprzedziałowych, jak ta na poniższym rysunku, wyznacza się metodą Clebsch'a
- pozwala ona zapisać moment zginający tak, aby w wyrażeniu dla każdego nowego przedziału zachowane zostały wszystkie składniki zapisane dla przedziałów poprzednich
- otrzymujemy zatem jedno równanie, niezależnie od liczby przedziałów w belce



Równanie różniczkowe linii ugięcia belki

Metoda Clebscha

Stosując metodę Clebsch'a postępujemy zgodnie z następującymi zasadami:

- układ współrzędnych umieszczamy w lewym końcu belki
- oznaczamy punkty charakterystyczne współrzędnymi $x_1, x_2, \ldots$
- każde obciążenie ciągłe, kończące się przed końcem belki, przedłużamy do jej końca, przykładając jednocześnie obciążenie o przeciwnym zwrocie i tej samej wartości na odcinku w rzeczywistości nieobciążonym

Równanie różniczkowe linii ugięcia belki

Metoda Clebscha

Stosując metodę Clebsch'a postępujemy zgodnie z następującymi zasadami:

- zapisujemy równanie momentu pamiętając, aby moment skupiony przyłożony w miejscu o współrzędnej x_i przemnożyć przez wyraz $(x - x_i)^0$
- całkujemy równanie pamiętając, aby wyrażenia typu $(x - x_i)^n$, gdzie x_i są współrzędnymi początków kolejnych przedziałów, całkować bez ich rozwijania, tzn.

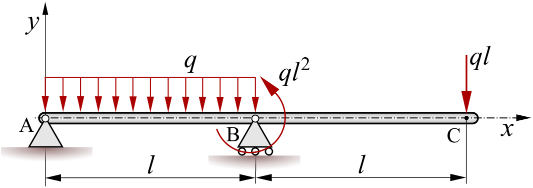
$$\int (x - x_i)^n dx = \frac{(x - x_i)^{n+1}}{n+1} + C$$

Zastosowanie metody Clebscha

Przykład (*rozwiązanie w materiałach dodatkowych*)

Dla belki przedstawionej na rysunku:

- zapisać równanie momentu,
- wyznaczyć ugięcie punktu C.

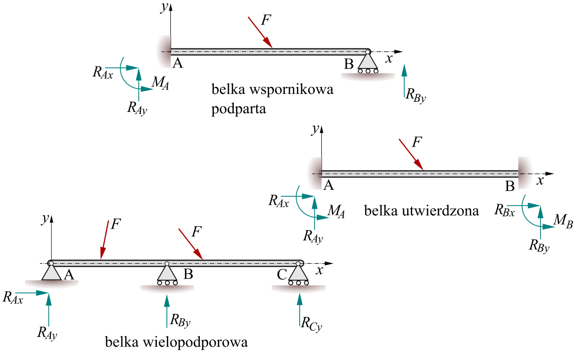


Plan wykładu

- Metoda Clebscha
- Belki statycznie niewyznaczalne
- Skrócenie belki
- Energia odkształcenia sprężystego

Belki statycznie niewyznaczalne

- w przypadku, gdy reakcji jest więcej niż możliwych do zapisania równań równowagi, mamy do czynienia z belką statycznie niewyznaczalną
- belki takie rozwiązuje się m.in. metodą superpozycji lub metodą Clebscha

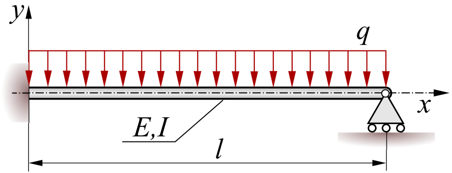


Belki statycznie niewyznaczalne

Metoda superpozycji

Dla belki przedstawionej na rysunku wyznaczyć:

- reakcje w podporach,
- siły wewnętrzne,
- linię ugięcia wraz z punktami charakterystycznymi.

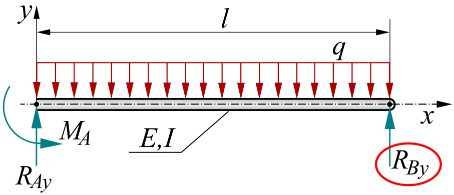


Belki statycznie niewyznaczalne

Metoda superpozycji

Dla prostych przypadków belek reakcje hiperstatyczne można wyznaczyć metodą superpozycji. Schemat postępowania jest następujący:

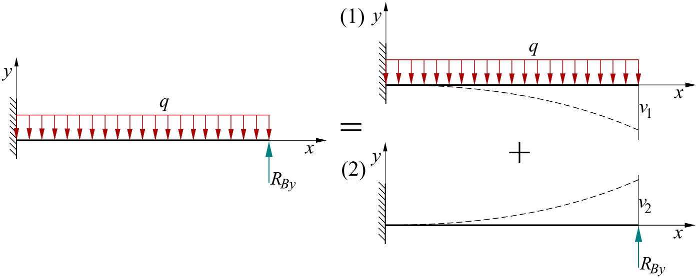
- wybieramy reakcję hiperstatyczną,
- z równań równowagi, zapisujemy pozostałe reakcje jako funkcje reakcji hiperstatycznej,



Belki statycznie niewyznaczalne

Metoda superpozycji

- rozkładamy układ statycznie niewyznaczalny na dwa układy statycznie wyznaczalne,
  - obciążenie jak w oryginalnym zadaniu, ale bez reakcji hiperstatycznej (1)
  - obciążenie tylko reakcją hiperstatyczną (2)



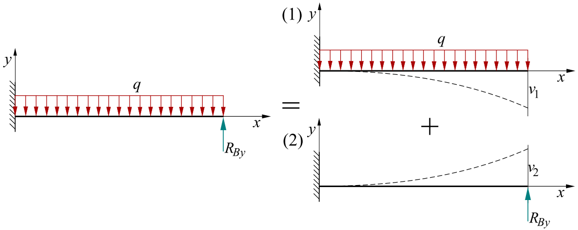
Belki statycznie niewyznaczalne

Metoda superpozycji

- ustalamy warunek geometryczny
- wyznaczamy przemieszczenia (z tablic)

$$v_1 = -\frac{ql^4}{8EI}, \qquad v_2 = \frac{R_{By}l^3}{3EI}$$

- wyznaczamy reakcję hiperstatyczną z warunku geometrycznego i pozostałe reakcje z warunków równowagi

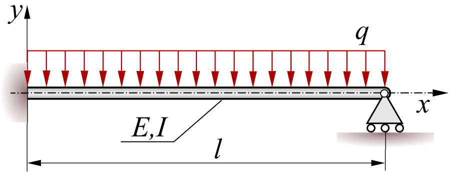


Belki statycznie niewyznaczalne

Zastosowanie metody Clebscha

Dla belki przedstawionej na rysunku wyznaczyć:

- reakcje w podporach,
- siły wewnętrzne,
- linię ugięcia wraz z punktami charakterystycznymi.



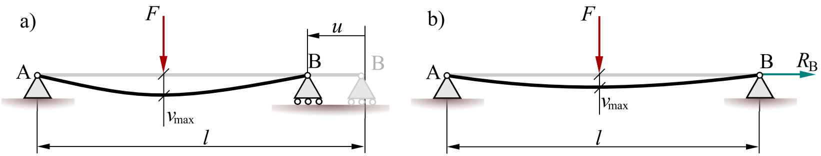
Plan wykładu

- Metoda Clebscha
- Belki statycznie niewyznaczalne
- Skrócenie belki
- Energia odkształcenia sprężystego

Skrócenie belki

Belka podparta na obu końcach ugina się pod wpływem obciążenia. Prowadzi to do:

- przemieszczenia podpory przesuwnej o wartość u (a),
- wywołanie reakcji poziomej i naprężeń rozciągających, jeśli oba końce belki są zablokowane (b).



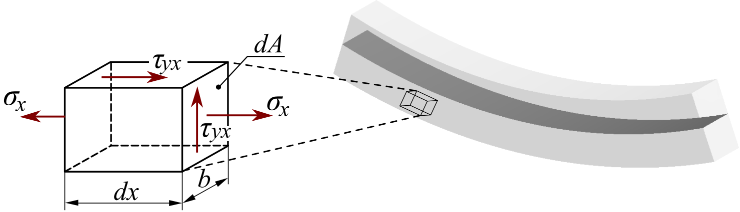
Plan wykładu

- Metoda Clebscha
- Belki statycznie niewyznaczalne
- Skrócenie belki
- Energia odkształcenia sprężystego

Energia odkształcenia przy zginaniu

Energia odkształcenia sprężystego gromadząca się w belce podczas zginania jest wynikiem pracy wykonywanej przez

- moment gnący – rozciąganie elementarnego odcinka belki
- siły poprzeczne – ścinanie elementarnego odcinka belki



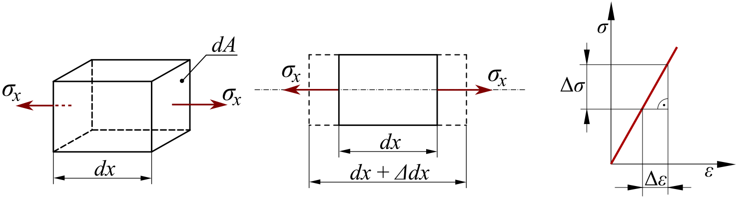
Energia odkształcenia przy zginaniu

- ponieważ w typowych belkach, dla których $l > 8h$, energia generowana przez siły poprzeczne jest dużo mniejsza niż ta, generowana przez siły normalne, rozpatrzymy jedynie moment gnący
- skorzystamy z zasady równoważności pracy i energii $dW = dU$
- wiemy, że praca jest iloczynem siły F działającej na punkt i przemieszczenia s tego punktu wzdłuż kierunku działania siły
- ponieważ jednak w naszym przypadku siła przyrasta od zera do wartości maksymalnej w sposób liniowy, elementarna praca będzie wyrażona zależnością

$$dW = \frac{1}{2}Fds$$

Energia odkształcenia przy zginaniu

- rozpatrywany wycinek belki ma elementarną objętość $dV = dxdA$
- siła działająca na element wynika z naprężeń normalnych i jest równa $F = \sigma dA$
- zgodnie z definicją odkształceń $\varepsilon = \Delta dx/dx$
- zatem przemieszczenie możemy zapisać jako $ds = \Delta dx = \varepsilon dx$



Energia odkształcenia przy zginaniu

- zatem praca elementarna, a tym samym elementarna energia będzie równa

$$dW = dU = \frac{1}{2}\sigma dA \cdot \varepsilon dx$$

- energię odkształcenia całej belki otrzymamy całkując powyższe równanie po całej objętości

$$U = \int\limits_V dU = \int\limits_l \int\limits_A \frac{1}{2}\sigma_x \varepsilon_x dA dx$$

Energia odkształcenia przy zginaniu

- pamiętając, że $\sigma_x = E\varepsilon_x$ oraz $\sigma_x = (My)/I_z$, a następnie całkując po powierzchni dA otrzymamy

$$U = \frac{1}{2}\int\limits_l \frac{M^2}{EI_z}dx$$

- dla belki pryzmatycznej, dla której moment gnący nie zmienia się na długości możemy zapisać

$$U = \frac{1}{2}\frac{M^2 l}{EI_z}$$

- wyrażenie to jest analogiczne do wyrażenia na energię odkształcenia sprężystego dla rozciąganego pręta

Energia odkształcenia przy zginaniu

Wpływ składowych energii

- poniżej przedstawiono wpływ proporcji długości belki l do jej wysokości h na stosunek energii generowanej przez siły zginające i tnące