Wytrzymałość Materiałów II

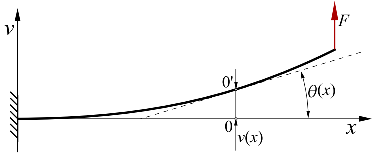
Zginanie
Linia ugięcia belki

opracował:
dr hab. inż. Paweł JASION
e-mail: pawel.jasion@put.poznan.pl
www: pawel.jasion.pracownik.put.poznan.pl

Politechnika Poznańska
Instytut Mechaniki Stosowanej
Zakład Wytrzymałości Materiałów i Konstrukcji

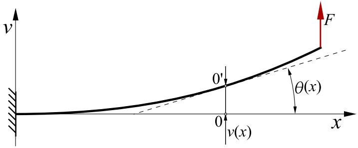
Równanie różniczkowe linii ugięcia belki

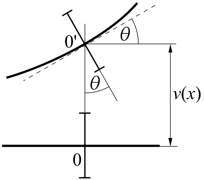
- pod wpływem obciążenia belka ugina się a jej oś się zakrzywia
- w przypadku zginania płaskiego, ugięta oś pozostaje w płaszczyźnie zginania
- ponieważ rozpatrywana jest oś belki, czyli oś obojętna, zakłada się, że długość belki się nie zmienia
- przyjmując małe przemieszczenia $(v/l) = (1/250)$ można powiedzieć, że wybrany punkt belki 0 przemieszcza się pionowo do nowego położenia 0'



Równanie różniczkowe linii ugięcia belki

- wprowadzamy dwie nowe wielkości: ugięcie belki $v(x)$, odpowiadające przemieszczeniu 00', i obrót belki $\theta(x)$
- obie wielkości są funkcją współrzędnej x i definiuje się je w punkcie
- funkcję $v = v(x)$ będziemy nazywali linią ugięcia belki
- zgodnie z hipotezą płaskich przekroi, każdy przekrój belki obraca się pozostając prostopadły do osi belki
- jak widać z rysunku, kąt obrotu przekroju to kąt obrotu belki w punkcie





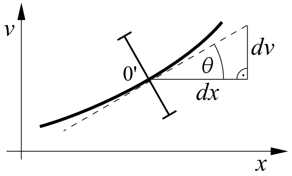
Równanie różniczkowe linii ugięcia belki

- jak wiemy z geometrii analitycznej, tangens kąta między styczną do krzywej a osią poziomą jest pochodną funkcji; w naszym przypadku mamy zatem

$$\mathrm{tg}\theta = \frac{dv}{dx}$$

- ponieważ kąty obrotu są małe, do 1°, możemy skorzystać z przybliżenia dla małych kątów $\mathrm{tg}\theta \approx \theta$ i zapisać zależność między kątem obrotu belki a ugięciem jako

$$\theta = \frac{dv}{dx}$$



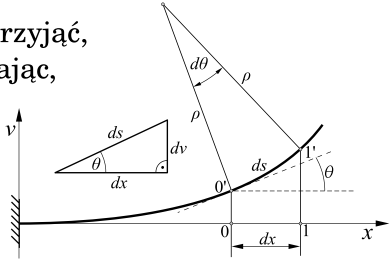
Równanie różniczkowe linii ugięcia belki

- znajdźmy jeszcze jedną przydatną zależność; z rysunku widać, że $ds = \rho d\theta$, co możemy zapisać

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{ds}$$

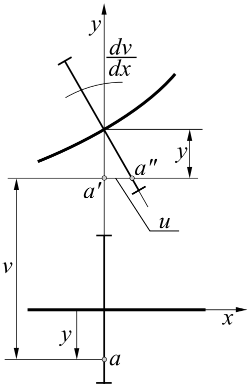
- z geometrii wiemy, że jest to wyrażenie na krzywiznę κ dowolnej krzywej w punkcie (krzywizna to odwrotność promienia krzywizny)
- dla małych ugięć możemy przyjąć, że $ds \approx dx$; ponadto pamiętając, że $\theta = dv/dx$, możemy zapisać

$$\kappa = \frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2v}{dx^2}$$



Równanie różniczkowe linii ugięcia belki

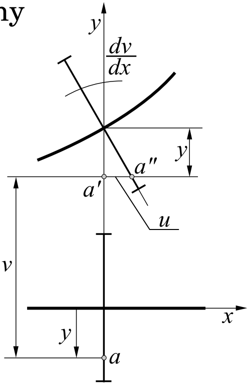
- znajdźmy zatem zależność między ugięciem belki a obciążającym ją momentem gnącym
- rozważmy przekrój poprzeczny belki obracający się wskutek ugięcia o kąt θ
- na przekroju tym wybierzmy punkt a oddalony od osi obojętnej o y
- w wyniku ugięcia belki punkt a przemieszcza się o v do pozycji a'
- w wyniku obrotu przekroju przemieszcza się o u do pozycji a''



Równanie różniczkowe linii ugięcia belki

- ponieważ przemieszczenia i obroty są małe możemy założyć, że po odkształceniu belki punkt a w dalszym ciągu znajduje się w odległości y od osi belki oraz że przemieszcza się poziomo z punktu a' do punktu a”, a nie po łuku
- z powstałego trójkąta widać, że możemy zapisać następującą zależność

$$u = y\frac{dv}{dx}$$



- z definicji odkształcenia normalnego wiemy, że $\varepsilon = du/dx$
- możemy zatem zapisać

$$\varepsilon = y\frac{d^2v}{dx^2}$$

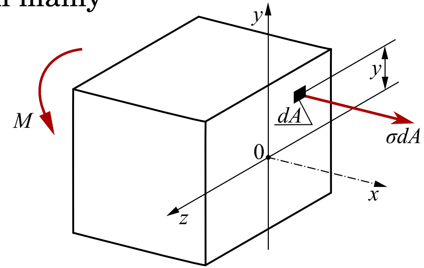
Równanie różniczkowe linii ugięcia belki

- zgodnie z prawem Hooke'a mamy

$$\sigma = E\varepsilon = Ey\frac{d^2v}{dx^2}$$

- zdefiniujmy teraz moment gnący jako funkcję sił wewnętrznych na przekroju belki
- zapisując równanie momentów względem osi z dla odciętego fragmentu belki mamy

$$M = \int_A \sigma y dA$$



Równanie różniczkowe linii ugięcia belki

- podstawiając otrzymane wyżej wyrażenie na naprężenia i wyciągając stałe przed znak całki otrzymamy

$$M = E\frac{d^2v}{dx^2}\int_A y^2 dA$$

- całka w powyższym wyrażeniu jest momentem bezwładności przekroju względem osi I_z; ostatecznie otrzymujemy

Przybliżone równanie różniczkowe linii ugięcia belki

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI_z}$$

Równanie różniczkowe linii ugięcia belki

- przeanalizujmy otrzymane równanie
- jest ono równaniem przybliżonym, ponieważ przyjęliśmy, że $ds \approx dx$; w ten sposób otrzymaliśmy przybliżone równanie krzywizny, które znajduje się po lewej stronie równania
- dokładne równanie linii ugięcia otrzyma się, wstawiając z lewej strony pełne wyrażenie na krzywiznę krzywej, czyli

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\frac{d^2v}{dx^2}}{\sqrt{\left(1 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2\right)^3}}$$

Równanie różniczkowe linii ugięcia belki

- w równaniu powyższym widać również jak działa przyjęte uproszczenie
- w mianowniku znajduje się kąt obrotu podniesiony do kwadratu
- ponieważ jest on bardzo mały, podniesiony do kwadratu będzie dążył do zera
- tym samym w mianowniku zostanie jedynka, a wyrażenie przyjmie wyprowadzoną przez nas uproszczoną postać

Równanie różniczkowe linii ugięcia belki

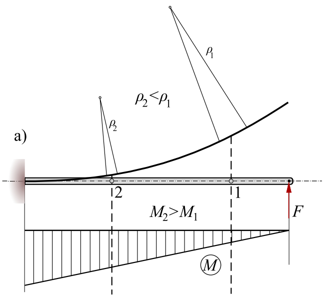
- warto również zauważyć związek między krzywizną belki a wartością momentu gnącego; równanie linii ugięcia ma postać

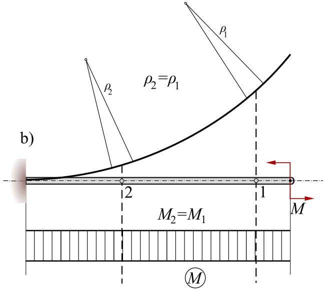
$$\frac{1}{\rho} = \frac{M(x)}{EI_z}$$

- zakładając, że belka jest pryzmatyczna, zarówno moduł Young'a E jak i moment bezwładności I_z są stałe
- zatem krzywizna belki zależy tylko od wartości momentu gnącego, co widać na poniższych przykładach belek wspornikowych obciążonych na wolnym końcu

Równanie różniczkowe linii ugięcia belki

- w przypadku siły skupionej (a) moment gnący rośnie w kierunku podpory, a tym samym promień krzywizny maleje
- w przypadku momentu skupionego (b) moment gnący jest stały na całej długości; stały jest również promień krzywizny; belka wygina się w łuk kołowy





Równanie różniczkowe linii ugięcia belki

Do dalszych rozważań i przykładów obliczeniowych przyjmujemy następujące konwencje

- dodatnie zwroty osi x i y to w prawo i w górę
- ugięcie v jest dodatnie w górę
- kąt obrotu θ jest dodatni w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara
- krzywizna κ jest dodatnia jeśli jest skierowana wypukłością w dół
- moment gnący M jest dodatni jeśli wywołuje ściskanie w górnej części belki

Równanie różniczkowe linii ugięcia belki

Całkowanie równania

Aby wyznaczyć linię ugięcia belki należy dwukrotnie scałkować równanie różniczkowe linii ugięcia

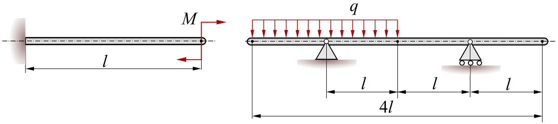
$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI}$$

$$\theta = \frac{dv}{dx} = \frac{1}{EI}\left[\int M(x)dx + C\right]$$

$$v = \frac{1}{EI}\left[\int\left(\int M(x)dx\right)dx + Cx + D\right]$$

Stałe całkowania C i D wyznaczamy z warunków brzegowych, czyli sposobu podparcia belki.

- warunki brzegowe określa się w punktach charakterystycznych belki
- najczęściej są to punkty podparcia
- w zależności od typu podpory, możliwe są dwa przypadki
  - kąt obrotu belki jest równy zeru
  - ugięcie belki jest równe zeru
- zwykle warunków brzegowych jest tyle ile stałych całkowania (poniżej dwa przykłady)



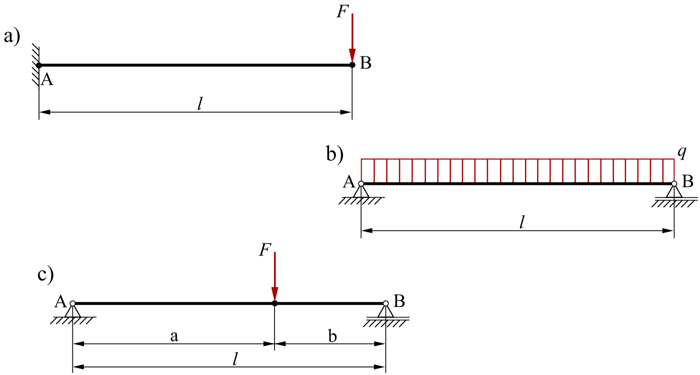
1) dla $x = 0$ $\theta = 0$ lub $\theta(0)=0$

2) dla $x = 0$ $v = 0$ lub $v(0)=0$

1) dla $x = l$ $v = 0$ lub $v(l)=0$

2) dla $x = 3l$ $v = 0$ lub $v(3l)=0$

Zapisać równanie linii ugięcia belek przedstawionych na rysunkach. Wyznaczyć wartości ugięć i kątów obrotów w punktach charakterystycznych.



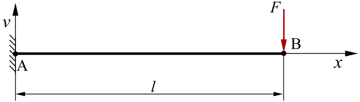
Równanie różniczkowe linii ugięcia belki
Przykład a)

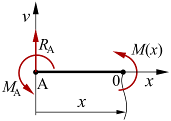
- zadanie rozpoczynamy od wprowadzenia układu współrzędnych, zgodnie z przyjętą wyżej konwencją
- z równań równowagi wyznaczamy reakcje w podporze, które będą równe

  $R_A = F$ oraz $M_A = Fl$

- belka ma tylko jeden przedział zmienności dla x; odcinamy więc fragment belki w odległości x od początku układu współrzędnych i zapisujemy równanie momentów względem punktu odcięcia

$$\sum M_0 = 0 \;\rightarrow\; -Fl + Fx - M(x) = 0$$





- z powyższego równania zapisujemy równanie momentu dla przedziału, w tym przypadku całej belki

  $M(x) = Fx - Fl$

- jest to równanie, które podstawiamy do równania linii ugięcia belki

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{1}{EI}\left[Fx - Fl\right]$$

- całkujemy równanie dwukrotnie

- po pierwszym scałkowaniu otrzymamy równanie kąta obrotu belki

$$\theta(x) = \frac{1}{EI}\left[\frac{1}{2}Fx^2 - Flx + C\right]$$

- po drugim scałkowaniu otrzymamy równanie linii ugięcia belki

$$v(x) = \frac{1}{EI}\left[\frac{1}{6}Fx^3 - \frac{1}{2}Flx^2 + Cx + D\right]$$

- aby móc skorzystać z równań musimy jeszcze wyznaczyć stałe całkowania C i D

Równanie różniczkowe linii ugięcia belki

Przykład a)

- w przypadku belki wspornikowej można zapisać dwa warunki brzegowe
  - ugięcie w utwierdzeniu jest równe zeru: 1) $v(0) = 0$
  - kąt obrotu w utwierdzeniu jest równy zeru: 2) $\theta(0) = 0$
- zaczniemy od równania na kąt obrotu, ponieważ jest tam tylko jedna stała do wyznaczenia; może nam do tego posłużyć warunek brzegowy 2)
- zgodnie z warunkiem, równanie na kąt obrotu przyrównujemy do zera, a za x podstawiamy 0; mamy więc

$$\theta(0) = \frac{1}{EI}\left[\frac{1}{2}F0^2 - Fl0 + C\right] = 0 \ \rightarrow \ C = 0$$

- wiedząc już, że $C = 0$, używamy drugiego warunku brzegowego, aby wyznaczyć drugą stałą
- zatem, równanie na ugięcie belki przyrównujemy do 0, a za x podstawiamy 0

$$v(0) = \frac{1}{EI}\left[\frac{1}{6}F0^3 - \frac{1}{2}Fl0^2 + C0 + D\right] = 0 \;\rightarrow\; D = 0$$

- podstawiając stałe do uzyskanych wcześniej równań, otrzymamy rozwiązanie zadania

$$\theta(x) = \frac{1}{EI}\left[\frac{1}{2}Fx^2 - Flx\right]$$

$$v(x) = \frac{1}{EI}\left[\frac{1}{6}Fx^3 - \frac{1}{2}Flx^2\right]$$

Równanie różniczkowe linii ugięcia belki

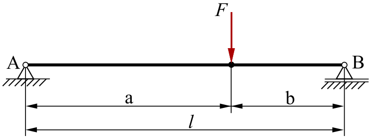
Przykład a)

- mając oba równania, można dla dowolnej wartości x wyznaczyć kąt obrotu i przemieszczenie belki
- sprawdźmy te wartości dla końca belki, tzn. dla $x = l$

$$\theta(l) = -\frac{Fl^2}{2EI} \qquad \text{oraz} \qquad v(l) = -\frac{Fl^3}{3EI}$$

- obie wartości są ujemne, co jest zgodne z przyjętą wcześniej konwencją: koniec belki obraca się zgodnie z ruchem wskazówek zegara i przemieszcza w dół

- przeanalizujmy przykład c); w tym przypadku mamy dwa przedziały, a co za tym idzie dwa różne równania momentów opisujące belkę – jedno dla $0 \leq x \leq a$ i drugie dla $a \leq x \leq l$
- oznacza to, że całkowanie trzeba wykonać osobno dla każdego przedziału
- wygeneruje to cztery stałe całkowania – po dwie dla każdego przedziału



Równanie różniczkowe linii ugięcia belki
Przykład c)

- z rysunku widać, że są dwa warunki brzegowe
- pozostałe dwa warunki uzyska się analizując zachowanie się belki
- ponieważ w punkcie przyłożenia siły, na granicy przedziałów nie ma przegubu, a materiał zachowuje ciągłość, to belka zachowuje się tak samo na końcu pierwszego przedziału jak na początku drugiego, czyli kąty obrotu oraz przemieszczenia są takie same
- należy zatem przyrównać równania na θ i v dla x odpowiadającego granicy przedziałów
- jaki jest wynik?