Analiza Wytrzymałościowa Konstrukcji Mechanicznych

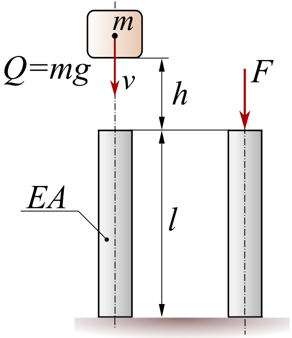
Metody energetyczne w mechanice
Obciążenie udarowe

dr hab. inż. Paweł JASION
e-mail: pawel.jasion@put.poznan.pl
www: pawel.jasion.pracownik.put.poznan.pl

Politechnika Poznańska
Instytut Mechaniki Stosowanej
Zakład Wytrzymałości Materiałów i Konstrukcji

Definicja obciążenia udarowego

- w przypadku obciążenia statycznego deformacja i naprężenia mogą być łatwo określone, ponieważ wartość siły jest stała w czasie i zadana z góry
- dla obciążenia dynamicznego wartość siły zależy od czasu



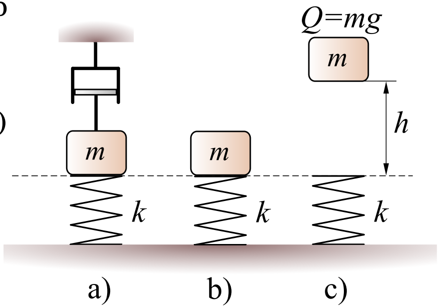
Definicja obciążenia udarowego

Obciążenie udarowe można podzielić na trzy kategorie, zależnie od jego intensywności

a) szybko przemieszczająca się siła o stałej wartości (samochód jadący przez most)

b) siła przyłożona w sposób nagły (eksplozja)

c) bezpośrednie uderzenie (zderzenie z przeszkodą)

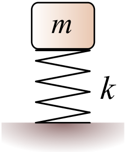


Definicja obciążenia udarowego

Rozróżnienie pomiędzy obciążeniem statycznym i dynamicznym:

- porównanie czasu t potrzebnego do przyłożenia obciążenia z okresem nietłumionych drgań własnych T masy na sprężynie

$$T = 2\pi\sqrt{m/k}$$



  - dla $t > 3T$ – obciążenie statyczne
  - dla $t < 0.5T$ – obciążenie dynamiczne

Należy zauważyć, że:

- elementy obciążone statycznie projektuje się tak, aby przenosiły obciążenie
- elementy obciążone dynamicznie projektuje się tak, aby pochłaniały energię

Odkształcenie i naprężenia od obciążenia udarowego mogą być określone przy użyciu zasady zachowania energii.

energia potencjalna upuszczonej masy

$$E_p = mgh$$

$$\downarrow$$

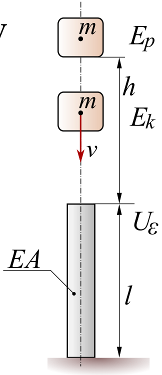
energia kinetyczna spadającej masy

$$E_k = \frac{mv^2}{2} \text{ gdzie } v = \sqrt{2gh}$$

$$\downarrow$$

energia odkształcenia sprężystego

$$U_\varepsilon = \frac{F^2 l}{2EA}$$



Wyznaczanie odkształcenia i naprężeń

Podczas uderzenia energia kinetyczna zamieniana jest na różne typy energii:

- energię odkształcenia sprężystego
- energię cieplną
- lokalne odkształcenie plastyczne
- energię kinetyczną przemieszczającej się w czasie odkształcania masy (w górę lub w dół)

Wyznaczanie odkształcenia i naprężeń

Dla ułatwienia analizy przyjmiemy następujące założenia:

- spadająca masa, po uderzeniu, podąża za uderzoną powierzchnią (nie odbija się)
- nie ma strat energii
  - cała energia kinetyczna zamienia się na energię odkształcenia sprężystego; naprężenia będą zatem przeszacowane
- pomijamy masę uderzanego elementu
- naprężenia pozostają w zakresie sprężystym
- rozkład naprężeń w objętości uderzanego elementu jest jednorodny

Wyznaczanie odkształcenia i naprężeń

Dla ułatwienia analizy przyjmiemy następujące założenia:

- spadająca masa, po uderzeniu, podąża za uderzoną powierzchnią (nie odbija się)
- nie ma strat energii
  - cała energia kinetyczna zamienia się na energię odkształcenia sprężystego; naprężenia będą zatem przeszacowane
- pomijamy masę uderzanego elementu
- naprężenia pozostają w zakresie sprężystym
- rozkład naprężeń w objętości uderzanego elementu jest jednorodny

Wyznaczanie odkształcenia i naprężeń

Dla ułatwienia analizy przyjmiemy następujące założenia:

- spadająca masa, po uderzeniu, podąża za uderzoną powierzchnią (nie odbija się)
- nie ma strat energii
  - cała energia kinetyczna zamienia się na energię odkształcenia sprężystego; naprężenia będą zatem przeszacowane
- pomijamy masę uderzanego elementu
- naprężenia pozostają w zakresie sprężystym
- rozkład naprężeń w objętości uderzanego elementu jest jednorodny

Wyznaczanie odkształcenia i naprężeń

Dla ułatwienia analizy przyjmiemy następujące założenia:

- spadająca masa, po uderzeniu, podąża za uderzoną powierzchnią (nie odbija się)
- nie ma strat energii
  - cała energia kinetyczna zamienia się na energię odkształcenia sprężystego; naprężenia będą zatem przeszacowane
- pomijamy masę uderzanego elementu
- naprężenia pozostają w zakresie sprężystym
- rozkład naprężeń w objętości uderzanego elementu jest jednorodny

Wyznaczanie odkształcenia i naprężeń

Dla ułatwienia analizy przyjmiemy następujące założenia:

- spadająca masa, po uderzeniu, podąża za uderzoną powierzchnią (nie odbija się)
- nie ma strat energii
  - cała energia kinetyczna zamienia się na energię odkształcenia sprężystego; naprężenia będą zatem przeszacowane
- pomijamy masę uderzanego elementu
- naprężenia pozostają w zakresie sprężystym
- rozkład naprężeń w objętości uderzanego elementu jest jednorodny

Wyznaczanie odkształcenia i naprężeń

Dla ułatwienia analizy przyjmiemy następujące założenia:

- spadająca masa, po uderzeniu, podąża za uderzoną powierzchnią (nie odbija się)
- nie ma strat energii
  - cała energia kinetyczna zamienia się na energię odkształcenia sprężystego; naprężenia będą zatem przeszacowane
- pomijamy masę uderzanego elementu
- naprężenia pozostają w zakresie sprężystym
- rozkład naprężeń w objętości uderzanego elementu jest jednorodny

Wyznaczanie odkształcenia i naprężeń

- rozważmy prosty pręt o sztywności EA i długości l obciążony masą m spadającą z wysokości h
- zgodnie z zasadą zachowania energii:

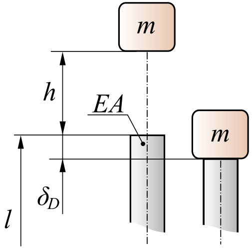
$$E_p = U_\varepsilon$$

  - energia potencjalna

    $$E_p = mgh = Q(h + \delta_D)$$

  - energia odkształcenia sprężystego

    $$U_\varepsilon = \frac{1}{2} F_e \delta_D$$



- F_e jest nieznaną siłą zastępczą wywołującą deformację wskutek uderzenia

Współczynnik nadwyżek dynamicznych

- zrównując obie energie otrzymamy

$$Q(h+\delta_D) = \frac{1}{2}F_e\delta_D$$

- dla pręta ściskanego, zależność siły od ugięcia ma postać

$$\delta_D = \frac{F_e l}{EA} \qquad \text{co daje} \qquad F_e = \frac{\delta_D EA}{l}$$

- podstawiając to do powyższego równania i porządkując mamy

$$-\delta_D^2 + 2\delta_D\left(\frac{Ql}{EA}\right) + 2h\left(\frac{Ql}{EA}\right) = 0$$

Współczynnik nadwyżek dynamicznych

- należy zauważyć, że wyrażenie w nawiasie jest odkształceniem wywołanym statycznym obciążeniem Q
$$\delta_S = \frac{Ql}{EA}$$
- mamy zatem
$$-\delta_D^2 + 2\delta_D\delta_S + 2h\delta_S = 0$$
- rozwiązanie równania da nam przemieszczenie wywołane siłą dynamiczną
$$\delta_D = \delta_S\left[1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\delta_S}}\right] = \delta_S K_D$$

gdzie K_D jest współczynnikiem nadwyżek dynamicznych

Współczynnik nadwyżek dynamicznych

- spróbujmy wyznaczyć siłę zastępczą F_e; zakładamy, że sztywność pręta k się nie zmienia i jest równa

$$k = \frac{EA}{l}$$

- ponieważ $F_e = \delta_D k$ oraz $Q = \delta_S k$, możemy zapisać

$$F_e = Q\frac{\delta_D}{\delta_S}$$

- zatem siła zastępcza jest równa

$$F_e = Q\left[1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\delta_S}}\right] = QK_D$$

Współczynnik nadwyżek dynamicznych

- w większości problemów inżynierskich $h >> \delta_S$, zatem współczynnik nadwyżek dynamicznych redukuje się do

$$K_D = \sqrt{\frac{2h}{\delta_S}}$$

- ponieważ uderzenie nie zawsze wywołane jest siłą grawitacji, wygodnie jest wyrazić współczynnik nadwyżek dynamicznych jako funkcję energii kinetycznej

$$K_D = \sqrt{\frac{2h}{\delta_S}} = \sqrt{\frac{2hQ}{\delta_S Q}} = \sqrt{\frac{hQ}{\frac{1}{2}\delta_S Q}} = \sqrt{\frac{E_k^0}{U_\varepsilon^S}}$$

gdzie E_k^0 jest energią ciała w momencie zderzenia

Współczynnik nadwyżek dynamicznych

Przypadek szczególny – siła przyłożona w sposób nagły

- szczególnym przypadkiem obciążenia udarowego jest siła przyłożona w sposób nagły, tzn. gdy $h = 0$
- z wyrażenia na przemieszczenie wskutek siły dynamicznej mamy

$$\delta_D = \delta_S \left[1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\delta_S}} \right]$$

- ostatecznie

$$\delta_D = 2\delta_S$$

- współczynnik nadwyżek dynamicznych $K_D = 2$; zatem siła przyłożona w sposób nagły wywołuje taki efekt, jak siła dwa razy większa przyłożona w sposób statyczny

$$F_e = 2Q$$

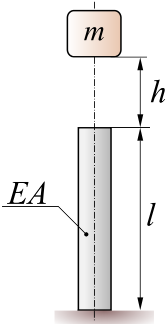
Wyznaczyć naprężenia od obciążenia dynamicznego σ_D w pręcie obciążonym osiowo, zgodnie ze schematem przedstawionym na rysunku.

- z powyższych rozważań wiemy, że

$$\delta_D = \delta_S K_D \quad \text{oraz} \quad F_D = F_S K_D$$

- ponieważ, zgodnie z prawem Hooke'a, naprężenia są proporcjonalne do odkształcenia, możemy też zapisać

$$\sigma_D = \sigma_S K_D$$



Naprężenia w pręcie obciążonym uderzeniowo

Przykład 1

- rozpoczniemy zatem od wyznaczenia współczynnika K_D z zależności

$$K_D = \sqrt{\frac{E_k^0}{U_\varepsilon^S}}$$

- energia odkształcenia sprężystego dla obciążenia statycznego $Q = mg$

$$U_\varepsilon^S = \frac{Q^2 l}{2EA}$$

- podstawiając to do wyrażenia na K_D mamy

$$K_D = \sqrt{\frac{2EAE_k^0}{Q^2 l}}$$

- mnożąc licznik i mianownik przez A oraz wiedząc, że $\sigma_S = Q/A$, zatem

$$K_D = \sqrt{\frac{2EA^2E_k^0}{Q^2lA}} \rightarrow K_D = \frac{1}{\sigma_S}\sqrt{\frac{2EE_k^0}{lA}}$$

- a ponieważ $\sigma_D = \sigma_S K_D$ ostatecznie mamy

$$\sigma_D = \sqrt{\frac{2EE_k^0}{Al}}$$

Naprężenia w pręcie obciążonym udarowo

- ostatnie wyrażenie pozwala porównać efekt działania obciążenia statycznego i udarowego
- przy obciążeniu statycznym naprężenia zależą jedynie od wartości siły i przekroju poprzecznego pręta
- przy obciążeniu udarowym naprężenia zależą od objętości pręta (Al) oraz od materiału (E), z jakiego pręt jest wykonany
- takie same naprężenia uzyska się dla pręta krótkiego o dużej średnicy i dla pręta długiego o małej średnicy

Naprężenia w pręcie obciążonym udarowo

- wynika to z charakteru siły obciążającej
- przy obciążeniu statycznym siła obciążająca Q przekazywana jest wzdłuż pręta, a jej wartość nie zależy ani od materiału ani od rozmiarów pręta
- przy obciążeniu uderzeniowym siłą obciążającą jest F_D i zależy ona od przyspieszenia z jakim pręt przyjmuje uderzenie; zależy od czasu, w którym zmienia się prędkość uderzającego ciała

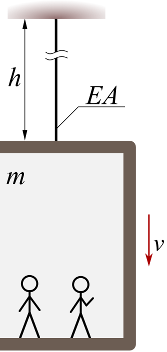
Naprężenia w pręcie obciążonym udarowo

- ten czas zależy od odkształcenia δ_D, czyli od podatności pręta – im dłuższy pręt i im mniejszy moduł Younga tym dłużej trwa uderzenie, tym mniejsze przyspieszenie i tym mniejsze obciążenie dynamiczne
- z tego powodu do tłumienia uderzeń stosuje się sprężyny, które dzięki dużym ugięciom skutecznie wydłużają czas uderzenia

Naprężenia w pręcie obciążonym uderzeniowo

- warunek wytrzymałościowy dla obciążeń dynamicznych można zapisać
$$\sigma_D \leq \sigma_D^{dop} = \frac{R_e}{n_D}$$
- współczynnik bezpieczeństwa n_D można przyjąć równy temu, dla obciążeń statycznych, ponieważ dynamiczny charakter obciążenia został już uwzględniony w wyrażeniu na σ_D
- ponieważ wzory powyższe są przybliżone, n_D nie powinien być mniejszy od 2

Winda o masie $m = 5$ t zjeżdża w dół ze stałą prędkością $v = 2$ m/s. Przekrój poprzeczny liny podtrzymującej windę ma wartość $A = 1600$ mm^2. Lina wykonana jest ze stali o module Younga $E = 210000$ MPa. Z powodu awarii winda zatrzymała się nagle w odległości $h = 20$ m od górnego końca liny. Wyznaczyć maksymalne wydłużenie i maksymalne naprężenia rozciągające pojawiające się w linie.



Konstrukcje obciążone udarowo
Przykład 2

- maksymalne wartości wydłużenia i naprężeń otrzymamy z zależności

$$\delta_D = \delta_S K_D \quad \text{oraz} \quad \sigma_D = \sigma_S K_D$$

- wartości statyczne otrzymamy natychmiast

$$\delta_S = \frac{Ql}{EA} = \frac{mgl}{EA} = 2,92 \text{ mm}$$

$$\sigma_S = \frac{Q}{A} = \frac{mg}{A} = 30,7 \text{ MPa}$$

- pozostaje wyznaczyć współczynnik nadwyżek dynamicznych K_D

Konstrukcje obciążone udarowo

Przykład 2

- wyrażenie na współczynnik nadwyżek dynamicznych ma postać

$$K_D = \sqrt{\frac{2h}{\delta_S}}$$

- jest ono prawdziwe dla przypadku swobodnego spadania obciążenia; w naszym przypadku winda zjeżdża w dół z prędkością v
- przekształćmy powyższe wyrażenie pamiętając, że $v = \sqrt{2gh}$
- rozwiązując powyższe ze względu na h i podstawiają do wyrażenia na współczynnik K_D otrzymamy

$$K_D = \sqrt{\frac{v^2}{g\delta_S}} = 11,8$$

Konstrukcje obciążone udarowo

Przykład 2

- mamy zatem

$$\delta_D = \delta_S K_D = 2,92\ \mathrm{mm} \cdot 11,8 = 34\ \mathrm{mm}$$

$$\sigma_D = \sigma_S K_D = 30,7\ \mathrm{MPa} \cdot 11,8 = 362\ \mathrm{MPa}$$

- z powyższego zadania widać, jak duża może być różnica między naprężeniami wywołanymi obciążeniem przyłożonym statycznie i udarowo
- w przypadku obciążenia statycznego materiał może pozostawać w zakresie sprężystym, ale to samo obciążenie przyłożone udarowo może spowodować uplastycznienie materiału

Naprężenia w pręcie obciążonym uderzeniowo

- przekształcając wyrażenie na K_D możemy zdefiniować gęstość energii odkształcenia u

$$u = \frac{U_\varepsilon}{V}$$

- w tym przypadku objętość $V = Al$, a energia U_ε jest równoważna energii kinetycznej w momencie uderzenia E_k^0
- zatem rozwiązując zależność na σ_D ze względu na energię otrzymamy

$$u = \frac{\sigma_D^2}{2E} \qquad \left(U_\varepsilon = \frac{\sigma_D^2 V}{2E}\right)$$

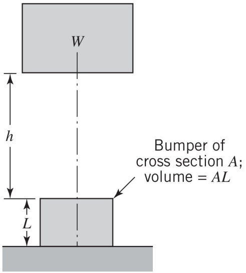
- zależność ta pozwala porównywać elementy tłumiące wykonane z różnych materiałów

Naprężenia w pręcie obciążonym uderzeniowo

Przykład 3

Opadający ciężar uderza w blok materiału służący jako pochłaniacz energii. Oszacować względną zdolność pochłaniania energii dla poniższych materiałów pochłaniacza:

- stal niskowęglowa: $E = 207000$ MPa; $R_e = 207$ MPa,
- stal wysokowęglowa: $E = 207000$ MPa; $R_e = 828$ MPa,
- guma: $E = 1,04$ MPa; $R_e = 2,07$ MPa.

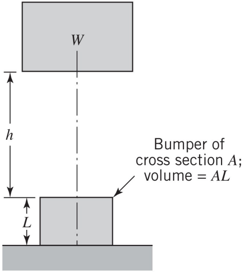


Naprężenia w pręcie obciążonym uderzeniowo

Przykład 3

Opadający ciężar uderza w blok materiału służący jako pochłaniacz energii. Oszacować względną zdolność pochłaniania energii dla poniższych materiałów pochłaniacza:

- stal niskowęglowa: $E = 207000$ MPa; $R_e = 207$ MPa,
- stal wysokowęglowa: $E = 207000$ MPa; $R_e = 828$ MPa,
- guma: $E = 1,04$ MPa; $R_e = 2,07$ MPa.

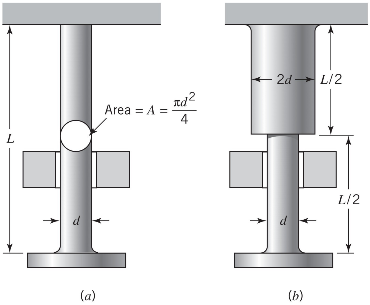


- stal niskowęglowa: $u = 0,1035$ MPa,
- stal wysokowęglowa: $u = 1,656$ MPa,
- guma: $u = 2,06$ MPa.

Naprężenia w pręcie obciążonym uderzeniowo
Przykład 4

Porównać zdolność pochłaniania energii dwóch prętów przedstawionych na rysunku.

Nie uwzględniać spiętrzeń naprężeń oraz założyć granicę plastyczności równą R_e.



Energie zaabsorbowane przez poszczególne pręty wynoszą:

- pręt I: $U_\varepsilon^I = \dfrac{R_e^2 V}{2E}$
- pręt II: $U_\varepsilon^{II} = \dfrac{1}{2}\dfrac{R_e^2 V}{2E} + \dfrac{1}{8}\dfrac{R_e^2 V}{2E} = \dfrac{5}{8}\dfrac{R_e^2 V}{2E}$

Wynika stąd, że:

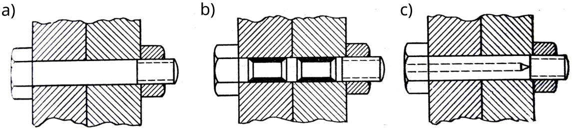
- pręt drugi zaabsorbuje jedynie ok. 60% energii w porównaniu do pręta pierwszego
- większość energii w przypadku pręta drugiego, bo aż 80% zostaje zaabsorbowana przez dolną, cieńszą część

Naprężenia w pręcie obciążonym uderzeniowo

Rozwiązania konstrukcyjne

Analiza powyższego rozwiązania pozwala na sformułowanie następujących zaleceń projektowych:

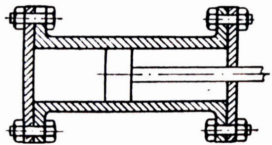
- w przpadku połączenia śrubowego obciążonego dynamicznie średnica śruby powinna być stała na całej długości
- w rozwiązaniu a) większość energii zostanie zaabsorbowana przez nagwintowaną część, która ma mniejszą średnicę
- przykładowe poprawione rozwiązania konstrukcyjne przedstawiono na rysunkach b) i c)



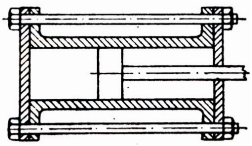
Naprężenia w pręcie obciążonym uderzeniowo
Rozwiązania konstrukcyjne

- zdolność połączenia śrubowego do pochłaniania energii można również zwiększyć wydłużając śrubę
- przykład poprawy rozwiązania z rysunku a) przedstawiono na rysunku b)

a)



b)



Literatura

1. Juvinall RC., Marshek KM. *Fundamentals of machnie component design*, Joh Willey & Sons, Inc., New York, 2017.
2. Belyaev NM. *Strength of Materials*, MIR Publisher, Moscow, 1979.
3. Gere JM., Goodno BJ. *Mechanics of materials*, Cengage Learning, Australia, 2009