Analiza Wytrzymałościowa Konstrukcji Mechanicznych

Pręty zakrzywione

dr hab. inż. Paweł JASION

e-mail: pawel.jasion@put.poznan.pl

www: pawel.jasion.pracownik.put.poznan.pl

Politechnika Poznańska
Instytut Mechaniki Stosowanej
Zakład Wytrzymałości Materiałów i Konstrukcji

Plan wykładu

1. Zastosowanie prętów zakrzywionych
2. Deformacja prętów zakrzywionych
   - Wyznaczanie sił wewnętrzych
   - Wyznaczanie przemieszczeń
3. Naprężenia w prętach zakrzywionych

Plan wykładu

1. Zastosowanie prętów zakrzywionych

2. Deformacja prętów zakrzywionych
   - Wyznaczanie sił wewnętrzych
   - Wyznaczanie przemieszczeń

3. Naprężenia w prętach zakrzywionych

Założenia

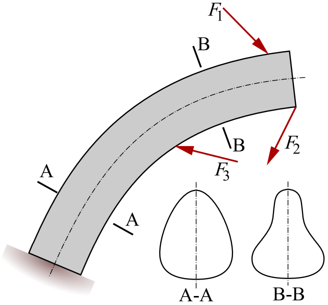
- w większości elementów konstrukcyjnych oś obojętna jest prostą
- jeśli pojawiają się odchylenia, to są zaniedbywalnie małe
- są jednak elementy konstrukcyjne, w których linia środkowa jest zakrzywiona




Założenia

Pręty zakrzywione analizuje się przyjmując podobne założenia, jak dla prętów prostych

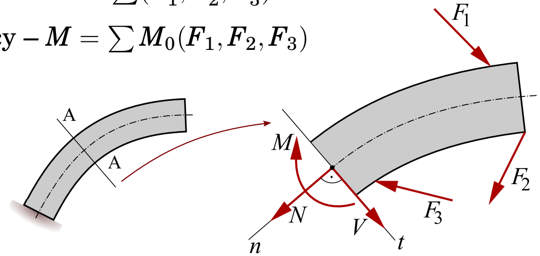
- wszystkie przekroje poprzecznie mają oś symetrii
- wszystkie osie symetrii leżą na jednej płaszczyźnie
- oś pręta leży w tej samej płaszczyźnie – jest krzywą płaską
- siły zewnętrzne działają w tej samej płaszczyźnie
- deformacja pręta zachodzi w tej samej płaszczyźnie



Plan wykładu

Definicja sił wewnętrznych

- przetnijmy pręt przekrojem A-A i odrzućmy lewą część
- wszystkie siły działające na odrzuconą część będą równoważone siłami wewnętrznymi na przekroju belki
- w prętach zakrzywionych pojawiają się trzy siły wewnętrzne
  - siła normalna – $N = \sum(F_1^n, F_2^n, F_3^n)$
  - siła poprzeczna – $V = \sum(F_1^t, F_2^t, F_3^t)$
  - moment gnący – $M = \sum M_0(F_1, F_2, F_3)$

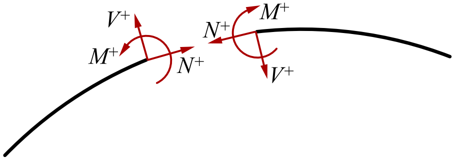


Konwencja znaków

Wprowadźmy konwencję znaków; jako dodatnie traktujemy

- siły normalne, które są rozciągające
- siły poprzeczne, które otrzymujemy przez obrót dodatniej siły normalnej o 90° w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara
- moment gnący, który zmniejsza krzywiznę pręta

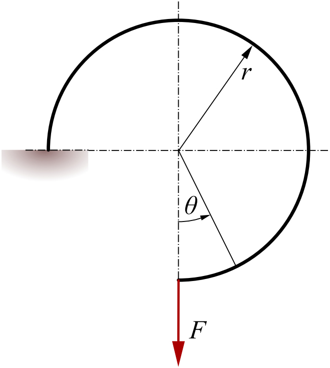
Konwencja powyższa jest prawdziwa dla obu części przeciętego pręta, prawej i lewej.



Pręty zakrzywione

Przykład 1

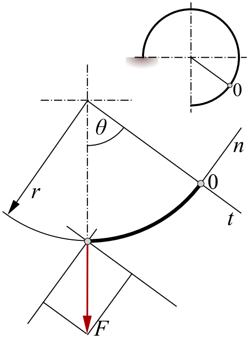
Wyznaczyć siły wewnętrzne w pręcie zakrzywionym, obciążonym siłą F. Promień osi obojętnej jest równy r. Kąt θ zmienia się w zakresie $(0, \frac{3}{2}\pi)$.



Pręty zakrzywione

Przykład 1

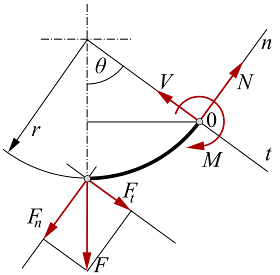
- ponieważ celem zadania jest wyznaczenie sił wewnętrznych, zastosujemy metodę przekroi myślowych
- przekrój wygodnie jest zrobić tak, aby pozostała część pręta była tą z obciążeniem; odrzucając część z podporą unikamy konieczności wyznaczania reakcji w podporze
- odcinamy zatem fragment pręta w punkcie '0' na współrzędnej θ licząc od punktu przyłożenia siły
- w punkcie przecięcia wyznaczamy kierunki: normalny do przekroju n i styczny t
- te same kierunki wyznaczamy w punkcie przyłożenia siły



Pręty zakrzywione

Przykład 1

- na przekroju pręta (punk ’0’) wprowadzamy siły wewnętrzne, zgodnie z przyjętą wcześniej konwencją znaków
- siłę F rozkładamy na kierunki n i t
- zależności na poszczególne siły wewnętrzne otrzymamy z równań równowagi



$$\sum F_n = 0 \;\rightarrow\; N - F_n = 0 \;\rightarrow\; N = F\sin\theta$$

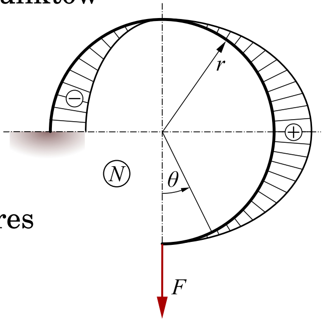
$$\sum F_t = 0 \;\rightarrow\; V - F_t = 0 \;\rightarrow\; V = F\cos\theta$$

$$\sum M_0 = 0 \;\rightarrow\; M - Fr\sin\theta = 0 \;\rightarrow\; M = Fr\sin\theta$$

Pręty zakrzywione

Przykład 1

- na podstawie otrzymanych równań przygotowujemy wykresy sił wewnętrznych N, V, M
- z równań widać, że siły te zmieniają się zgodnie z funkcjami trygonometrycznymi
- wygodnie jest wyznaczyć kilka punktów charakterystyczny
    - miejsca zerowe sił
    - maksima i minima sił



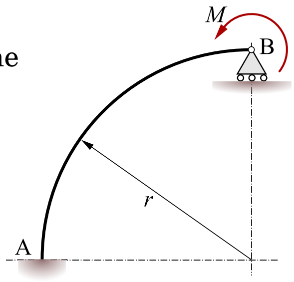
- dla czytelności rozwiązania wykres każdej siły dobrze jest umieścić na osobnym rysunku

Pręty zakrzywione

Przykład 2

Pręt zakrzywiony w postaci ćwiartki okręgu utwierdzony jest na jednym końcu (punkt A) i podparty przesuwnie na drugim końcu (punkt B). Obciążenie, w postaci momentu punktowego M, przyłożonej jest do końca B.

- narysować wykresy sił wewnętrznych
- wyznaczyć kąt obrotu w punkcie B
- wyznaczyć przemieszczenie poziome w punkcie B

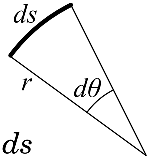


Pręty zakrzywione

Przykład 2

- zadanie jest statycznie niewyznaczalne; pojawiają się cztery reakcje
- zatem, aby rozwiązać zadanie, należy najpierw wyznaczyć wartość reakcji nadmiarowej
- można to łatwo zrobić, korzystając z twierdzenia Castigliano-Menabrea; w tym przypadku będzie

$$v_B = \frac{\partial U}{\partial R_B} = \int_s \frac{M(\theta)}{EI} \frac{\partial M(\theta)}{\partial R_B} ds = 0$$



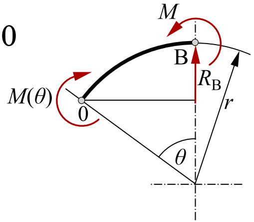
- ponieważ pręt jest zakrzywiony, jego elementarna długość wyrażona jest przez łuk ds
- należy zatem zapisać, że $ds = r d\theta$,
  a granice całkowania zmienić na $0 \leq \theta \leq \pi/2$

Pręty zakrzywione

Przykład 2

- należy teraz zdefiniować moment wewnętrzny $M(\theta)$ zapisując równanie równowagi
- ponieważ energia odkształcenia postaciowego generowana przez siły normalną i styczną jest zazwyczaj dużo mniejsza niż ta, generowana przez moment, w obliczeniach prętów zakrzywionych pomija się ją
- zgodnie z rysunkiem, równanie momentów względem punku przecięcia ma postać

$$\sum M_0 = 0 \;\rightarrow\; M(\theta) - M - R_B r \sin\theta = 0$$



Pręty zakrzywione
Przykład 2

- równanie siły wewnętrznej oraz jej pochodna mają postać

$$M(\theta) = M + R_B r \sin\theta \quad \text{oraz} \quad \frac{\partial M(\theta)}{\partial R_B} = r \sin\theta$$

- podstawiając powyższe do twierdzenia, otrzymamy

$$v_B = \frac{1}{EI} \int_0^{\pi/2} (M + R_B r \sin\theta)(r \sin\theta) r d\theta = 0$$

- a wartość reakcji to $R_B = -\dfrac{4M}{\pi r}$

Pręty zakrzywione

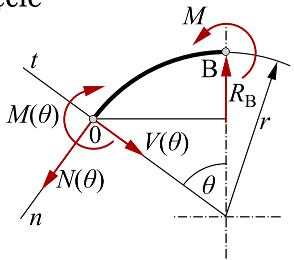
Przykład 2

- znając wartość reakcji R_B można wyznaczyć pozostałe reakcje oraz siły wewnętrzne w pręcie

$$N(\theta) = -\frac{4M}{\pi r}\sin\theta$$

$$V(\theta) = -\frac{4M}{\pi r}\cos\theta$$

$$M(\theta) = M(1 - \frac{4}{\pi}\sin\theta)$$



- według powyższych równań można sporządzić wykresy sił

Pręty zakrzywione

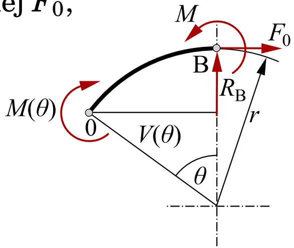
Przykład 2

- aby wyznaczyć kąt obrotu pręta w punkcie B, należy skorzystać z twierdzenia Castigliano

$$\theta_B = \frac{\partial U}{\partial M}$$

- wyznaczenie przemieszczenia poziomego punktu B wymaga wprowadzania siły fikcyjnej F_0, zgodnie z rysunkiem, i rozwiązania równania

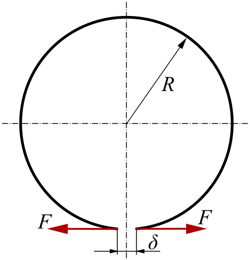
$$u_B = \frac{\partial U}{\partial F_0}$$



Pręty zakrzywione

Przykład 3 [Juvinall, 1967]

Pierścień tłokowy o promieniu R obciążony jest miejscu przecięcia siłą F.
Znaleźć zależność między siłą potrzebną do rozwarcia pierścienia a wartością δ.



Plan wykładu

Wyznaczanie naprężeń w prętach zakrzywionych

Równania równowagi

Wszystkie trzy składowe sił wewnętrznych generują naprężenia

- naprężenia normalne od siły rozciągającej: $\sigma_N = \dfrac{N}{A}$
- naprężenia styczne od siły poprzecznej: $\tau = \dfrac{TS(y)}{Ib}$
- naprężenia normalne od momentu gnącego: $\sigma_M = ?$

Aby wyznaczyć te ostatnie należy rozpatrzyć równowagę odciętego fragmentu belki

Wyznaczanie naprężeń w prętach zakrzywionych

Analiza odkształceń

Aby uzyskać informacje na temat rozkładu naprężeń na przekroju belki należy rozpatrzyć deformację elementarnego wycinka belki. Zakładamy przy tym, że

- przekrój poprzeczny płaski i normalny do osi obojętnej przed odkształceniem pozostaje taki po odkształceniu
- przekrój ten obraca się wokół osi obojętnej
- wydłużenie i skrócenie włókien, a zatem i naprężenia, wzdłuż linii równo oddalonych od osi obojętnej są takie same

Naprężenia w prętach zakrzywionych

- naprężenia normalne w prętach zakrzywionych są sumą naprężeń od siły normalnej N oraz od momentu gnącego M

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M}{S}\frac{y}{\rho}$$

  gdzie:

  A – pole powierzchni przekroju poprzecznego
  S – moment statyczny przekroju względem osi obojętnej
  y – odległość włókna od osi obojętnej
  ρ – promień krzywizny włókna oddalonego o y od osi obojętnej

- należy pamiętać, że oba składniki naprężeń mogą być dodatnie lub ujemne; należy to ustalić analizując zachowanie się pręta

Naprężenia w prętach zakrzywionych

- w praktyce wyznacza się wartość naprężeń na powierzchni zewnętrznej pręta, o największym promieniu, i na powierzchni wewnętrznej, gdzie promień jest najmniejszy
- znając dodatkowo położenie osi obojętnej, gdzie naprężenia są równe zeru, można narysować wykres naprężeń na przekroju pręta; wykres ma kształt hiperboli

Naprężenia w prętach zakrzywionych

Zadanie wyznaczenia rozkładu naprężeń w pręcie zakrzywionym rozwiązujemy następująco

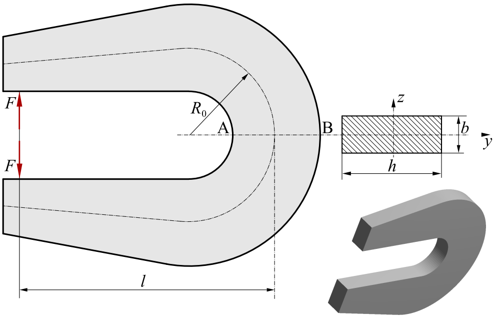
- dla wybranego przekroju, metodą przekroi myślowych, wyznaczyć siły wewnętrzne N i M
- obliczyć promień maksymalny i minimalny
- wyznaczyć położenie osi obojętnej
- wyznaczyć odległość skrajnych włókien od osi obojętnej
- obliczyć moment statyczny
- obliczyć naprężenia generowane przez moment gnący
- obliczyć naprężenia generowane przez siłę normalną
- obliczyć naprężenia w skrajnych włóknach sumując obie składowe z odpowiednim znakiem

Naprężenia w prętach zakrzywionych

Przykład 4 [Belyaev, 1979]

Wyznaczyć rozkład naprężeń w przekroju AB pręta zakrzywionego. Przyjąć następujące parametry

- $F = 8$ kN
- $R_0 = 80$ mm
- $h = 80$ mm
- $b = 30$ mm
- $l = 250$ mm



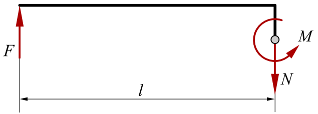
Naprężenia w prętach zakrzywionych

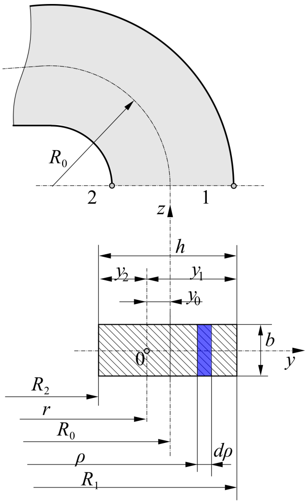
Przykład 4

- przygotowujemy rysunek, który ułatwi rozwiązanie zadania
- punktem '0' oznaczamy oś obojętną
- z uproszczonego schematu mamy

  $N = 8\text{kN oraz } M = 2\text{ kNm}$
- wartości promieni

  $R_1 = 120\text{ mm oraz } R_2 = 40\text{ mm}$





Naprężenia w prętach zakrzywionych

Przykład 4

- aby wyznaczyć położenie osi obojętnej y_0, należy najpierw obliczyć jej promień

$$r = \frac{A}{\int\limits_A \frac{dA}{\rho}} = 72,8 \text{ mm}$$

- mamy zatem

$$y_0 = R_0 - r = 7,18 \text{ mm}$$

- odległości skrajnych włókien

$$y_1 = h/2 + y_0 = 47,18 \text{ mm}$$

$$y_2 = h/2 - y_0 = 32,82 \text{ mm}$$

- moment statyczny

$$S = Ay_0 = 17232 \text{ mm}^3$$

Naprężenia w prętach zakrzywionych

Przykład 4

- możemy przystąpić do wyznaczenia naprężeń od momentu gnącego

$$\sigma_1^b = \frac{M}{S}\frac{y_1}{R_1} = -42,63 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2^b = \frac{M}{S}\frac{y_2}{R_2} = 95,23 \text{ MPa}$$

σ_1^b są ujemne, ponieważ współrzędna y_0 jest ujemna; poza tym wynika to również z charakteru zadania

- naprężenia od siły normalnej

$$\sigma_N = \frac{N}{A} = 3,33 \text{ MPa}$$

Naprężenia w prętach zakrzywionych

Przykład 4

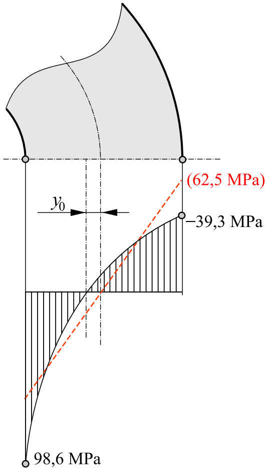
- ostateczne rozwiązanie otrzyma się sumując obie składowe naprężeń

$$\sigma_1 = \sigma_N - \sigma_1^b = -39,3 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = \sigma_N + \sigma_2^b = 98,56 \text{ MPa}$$

- wykorzystując otrzymane wartości oraz położenie osi obojętnej, gdzie naprężenia są równe zeru, można przygotować wykres naprężeń
- dla porównani warto nanieść naprężenia wyznaczone tak jak dla belki prostej

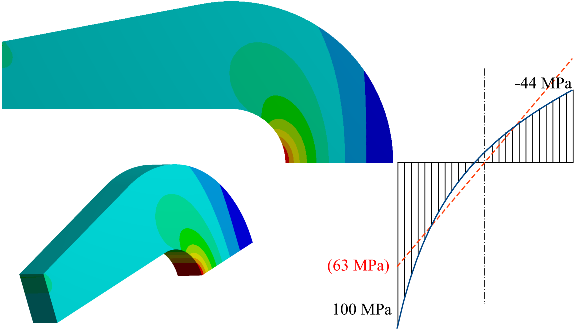
$$\sigma^b = \frac{My}{I_z} = 62,5 \text{ MPa}$$



Naprężenia w prętach zakrzywionych

Przykład 4 – rozwiązanie MES

- to samo zadanie rozwiązane metodą elementów skończonych da bardzo zbliżone wyniki



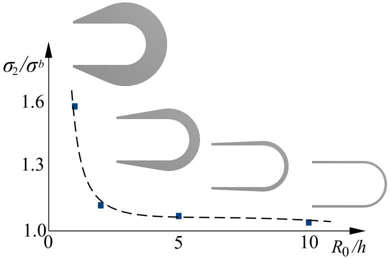
Naprężenia w prętach zakrzywionych

- z przedstawionego wcześniej rozwiązania widać, że rozkład naprężeń wyznaczany ze wzoru dla prętów zakrzywionych różni się od tego, dla prętów prostych
- naprężenia przy mniejszym promieniu są większe, a przy większym są mniejsze niż naprężenia dla pręta prostego
- różnica ta będzie tym większa, im większe będzie przesunięcie osi obojętnej

Rozkład naprężeń w prętach zakrzywionych

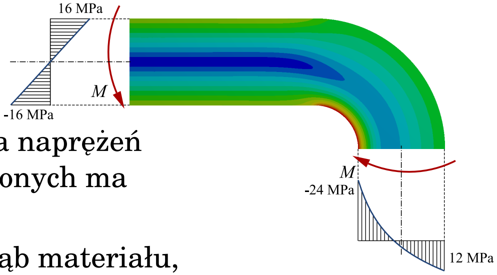
Wpływ proporcji R_0/h

- ponadto znaczenie ma również wysokość profilu
- poniżej widać wpływ stosunku promienia średniego do wysokości profilu
- na osi pionowej przedstawiono stosunek naprężeń przy mniejszym promieniu do naprężeń dla pręta prostego
- na podstawie powyższego wykresu, pręty kwalifikuje się jako
  - silnie zakrzywione, gdy $R_0/h < 5$
  - średnio zakrzywione, gdy $R_0/h > 5$



Rozkład naprężeń w prętach zakrzywionych

Wskazówki projektowe



- zjawisko spiętrzenia naprężeń w prętach zakrzywionych ma charakter lokalny
- przesuwają się w głąb materiału, wartość naprężeń szybko spada
- oznacza to, że projektując elementy z materiałów plastycznych obciążonych statycznie, można często pozostawić spiętrzenie naprężeń; materiał w tym miejscu uplastyczni się, a pozostała jego część pozostanie sprężysta

Rozkład naprężeń w prętach zakrzywionych

Wskazówki projektowe

- częstym błędem projektowym jest wzmacnianie miejsc ze spiętrzeniem naprężeń
- stosuje się wzmocnienia z cienkiej blachy, w których pojawiają się naprężenia wyższe niż w wyjściowym rozwiązaniu