

Wytrzymałość Materiałów II

Zginanie Napężenia styczne w belce zginanej

opracował:

dr hab. inż. Paweł JASION

e-mail: `pawel.jasion@put.poznan.pl`

www: `pawel.jasion.pracownik.put.poznan.pl`

Politechnika Poznańska
Instytut Mechaniki Stosowanej
Zakład Wytrzymałości Materiałów i Konstrukcji

- 1 Naprężenia w belce zginanej
 - Naprężenia styczne w belce
 - Belki złożone

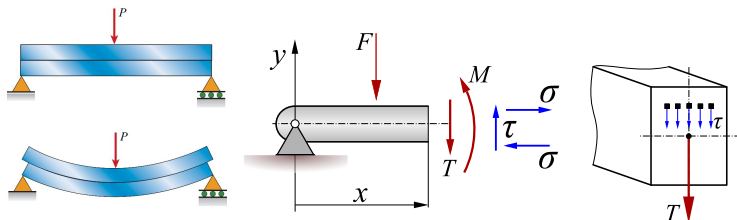
Plan wykładu

- 1 Naprężenia w belce zginanej
 - Naprężenia styczne w belce
 - Belki złożone

Wyznaczanie naprężeń stycznych

Naprężenia styczne równoważą poprzeczną siłę wewnętrzną. Aby je wyznaczyć przyjmujemy następujące założenia:

- wszystkie naprężenia są równoległe do siły T
- naprężenia na płaszczyźnie oddalonej o y od osi obojętnej są jednakowe



Rozkład naprężeń stycznych

- na podstawie powyższych założeń można wyprowadzić zależność na naprężenia styczne w belce
- zależność ta nazywana jest wzorem Żurawskiego i ma postać

$$\tau = \frac{TS_z(y)}{bI_z}$$

gdzie T jest siłą poprzeczną, $S_z(y)$ momentem statycznym przekroju, b jego szerokością, a I_z momentem bezwładności przekroju

- jak widać naprężenia te są zależne od momentu statycznego, który jest funkcją współrzędnej y
- zatem naprężenia styczne zmieniają się wzdłuż wysokości belki, a ich rozkład jest zależny od kształtu przekroju

Rozkład naprężeń stycznych

- rozpatrzmy przypadek belki o przekroju prostokątnym
- z definicji momentu statycznego mamy

$$S_z = \int_A y_c dA, \quad \text{a w naszym przypadku} \quad S_z = y_c A$$

- zgodnie z rysunkiem obie wielkości możemy zdefiniować jako

$$A = b \left(\frac{h}{2} - y \right) \quad \text{oraz} \quad y_c = \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} + y \right)$$

- moment statyczny będzie miał zatem postać

$$S_z = \frac{bh^2}{8} \left(1 - \frac{4y^4}{h^2} \right)$$

- podstawiając do wzoru Żurawskiego powyższe wyrażenie oraz to na moment bezwładności dla prostokąta otrzymamy wyrażenie na rozkład naprężeń

Rozkład naprężen stycznych

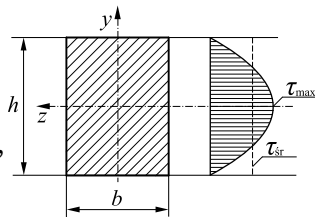
- wrażenie to ma postać

$$\tau = \frac{3}{2} \frac{T}{bh} \left(1 - \frac{4y^4}{h^2} \right)$$

- otrzymaliśmy równanie paraboli, której maksimum jest przy $y = 0$ i jest równe

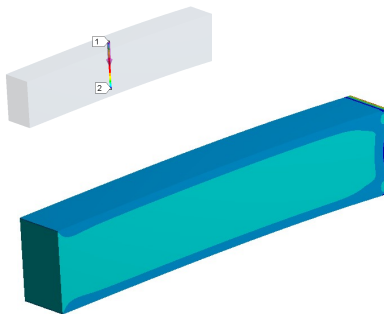
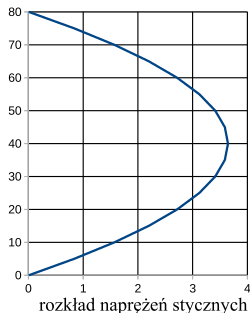
$$\tau_{max} = \frac{3}{2} \frac{T}{bh}$$

- porównując powyższą zależność z tą do wyznaczania naprężen stycznych średnich $\tau_{sr} = T/A$ widać, że maksimum naprężen otrzymanych ze wzoru Żurawskiego jest o 50% wyższe niż naprężenia średnie



Rozkład naprężeń stycznych

- rozkład naprężeń stycznych potwierdza wynik analizy MES dla belki wspornikowej
- pomijając miejsca podparcia i obciążenia, rozkład jest zgodny z tym, otrzymanym ze wzoru Żurawskiego



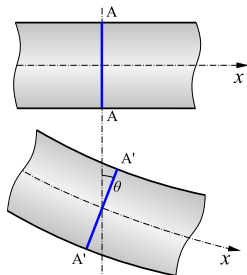
Rozkład naprężeń stycznych

Ograniczenia w stosowaniu wzoru Żurawskiego

- wysokość belki jest większa o jej szerokości
- krawędzie przekroju muszą być równoległe do osi y
- nie można go stosować dla przekrojów trójkątnych i półokrągłych
- belka musi być pryzmatyczna

Wpływ odkształcenia postaciowego

- hipoteza płaskich przekroji dla zginania, lub inaczej **hipoteza Eulera-Bernoulliego**, zakłada, że po odkształceniu przekrój poprzeczny pozostaje płaski i prostopadły do osi, zgodnie z rysunkiem
- hipoteza ta zakłada, że w belce nie pojawiają się naprężenia styczne, a co za tym idzie, nie pojawiają się odkształcenia postaciowe

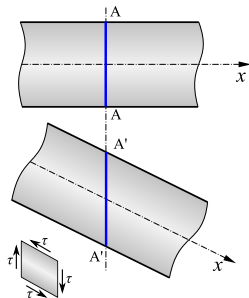


Wpływ odkształcenia postaciowego

- w ogólnym przypadku w belce pojawiają się siły poprzeczne; wywołują one odkształcenia postaciowe γ zgodnie z zależnością

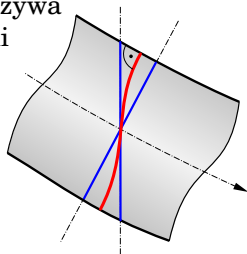
$$\tau = G\gamma \quad \rightarrow \quad \gamma = \frac{\tau}{G}$$

- gdyby w belce pojawiały się tylko napężenia styczne, deformacja wyglądałaby tak, jak na rysunku; mieli byśmy do czynienia z czystym odkształceniem postaciowym
- w rzeczywistości napężenia styczne są zerowe na powierzchniach swobodnych, a maksymalne w osi belki



Wpływ odkształcenia postaciowego

- w rzeczywistości w belce pojawiają się zarówno napężenia normalne, jak i napężenia styczne
- zatem rzeczywista deformacja przekroju belki jest opisana krzywą zawartą między dwoma skrajnymi, przedstawionymi wcześniej rozwiązaniami
- z powyższych rozważań wiadomo, że
 - napężenia styczne są zerowe na powierzchniach swobodnych, więc krzywa jest tam styczna do powierzchni belki tak, jak w hipotezie E-B
 - w osi belki napężenia normalne są zerowe a styczne maksymalne, więc tam krzywa najbardziej odbiega od hipotezy E-B; jest zgodna z deformacją przy czystym ścinaniu



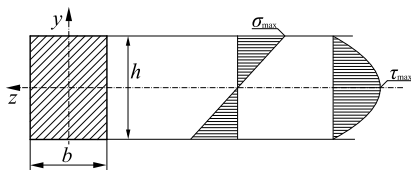
Pełna analiza wytrzymałości belki

Podejście uproszczone

Pełne obliczenia wytrzymałościowe belki, uwzględniające oba typy naprężeń można przeprowadzić w sposób przybliżony

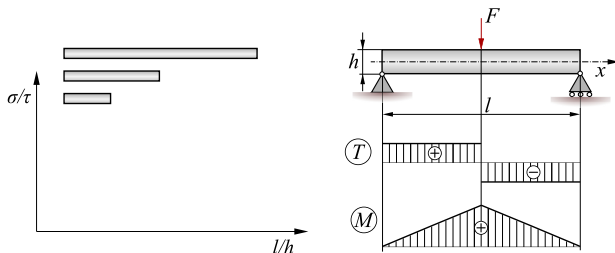
- zgodnie z równaniami opisującymi rozkład naprężeń, naprężenia normalne osiągają wartość największą tam, gdzie naprężenia styczne są równe zero i odwrotnie
- zatem, analizując wytrzymałość belki można sprawdzić dwa niezależne warunki wytrzymałościowe

$$-\sigma_{dop}^c \leq \sigma \leq \sigma_{dop}^r; \quad \tau \leq \tau_{dop}$$



Wpływ naprężeń stycznych na wytrzymałość belki

- rozpatrzmy wpływ naprężeń stycznych na wytrzymałość swobodnie podpartej belki obciążonej siłą skupioną
- obliczenia dotyczą belek o przekroju prostokątnym i trzech różnych proporcji długości do wysokości

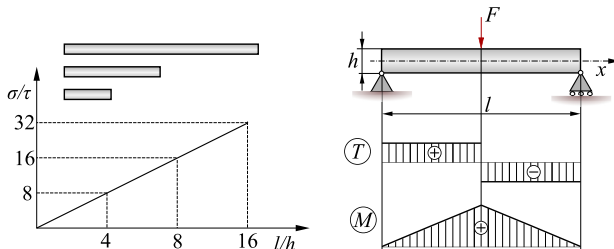


Wpływ naprężeń stycznych na wytrzymałość belki

- z porównania naprężeń normalnych do stycznych otrzymamy

$$\frac{\sigma}{\tau} = 2 \frac{l}{h}$$

- przyjmuje się, że jeśli $l/h > 8$, to w obliczeniach można pominąć naprężenia styczne



Znaczenie praktyczne naprężeń stycznych

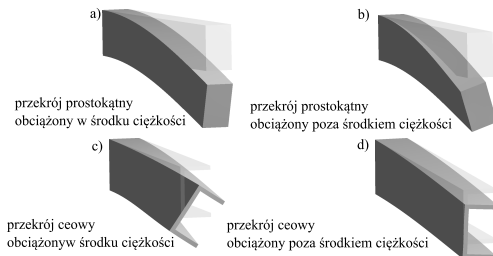
Naprężenia styczne stanowią wskaźnik zniszczenia w dwóch przypadkach:

- kiedy długość belki jest tego samego rzędu, co jej wysokość
- kiedy wytrzymałość materiału na ścinanie jest mała



Środek ścinania

- zobaczmy co się stanie, jeśli belka wspornikowa jest obciążona siłą przyłożoną poza środkiem ciężkości
- w przypadku przekroji symetrycznych następuje zwężenie belki; przy przekrojach niesymetrycznych płaskie zginanie można uzyskać tylko, jeśli siła przyłożona jest poza środkiem ciężkości, w **środku ścinania**

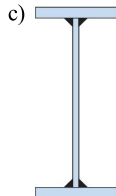
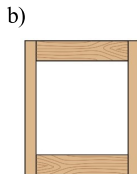


Plan wykładu

- 1 Naprężenia w belce zginanej
 - Naprężenia styczne w belce
 - Belki złożone

Belki złożone

- belki złożone zbudowane są z dwóch lub więcej części połączonych ze sobą na stałe
- są dopasowywane do konkretnej konstrukcji i pozwalają osiągnąć parametry (wymiary, sztywność) niedostępne w tradycyjny sposób
- można wyróżnić
 - belki drewniane pełne (a)
 - belki drewniane skrzynkowe (b)
 - dźwigary płytowe (c)



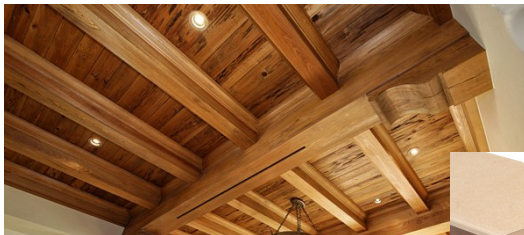
Belki złożone

Belki drewniane pełne



Belki złożone

Belki drewniane skrzynkowe



Belki złożone

Dźwigary płytowe



Belki złożone

Belki złożone muszą być zaprojektowane tak, aby działały jak pojedynczy element konstrukcyjny. Zatem obliczenia takich belek są dwuetapowe:

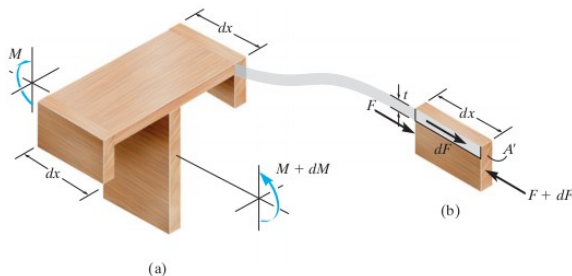
- etap pierwszy – obliczenia belki jako całości z uwzględnieniem naprężeń normalnych i stycznych
- etap drugi – obliczenia połączeń między elementami belki (śruby, spoiny, skleiny) tak, aby przeniosły one siły styczne pojawiające się między tymi elementami

Belki złożone

Obliczanie połączeń między elementami belki złożonej polega na wyznaczeniu wskaźnika nazywanego **intensywnością ścinania** (*shear flow*).

Intensywność ścinania

miara intensywności siły działającej wzdłuż osi belki

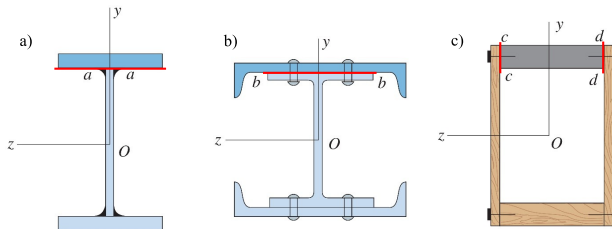


Belki złożone

Intensywność ścinania wyznaczamy z zależności:

$$f = \frac{TS(y)}{I_z}.$$

Intensywność ścinania jest intensywnością sił na wszystkich powierzchniach kontaktowych otaczających obszar, dla którego liczony jest moment statyczny.



Belki złożone

Przykład (Hibbeler [2016])

Belka drewniana o wymiarach przedstawionych na rysunku składa się z trzech desek połączonych gwoździami. Każdy gwoździe może przenieść siłę styczną $F = 300$ N. Przyjmując wartość siły poprzecznej T przenoszonej przez belkę równą 800 N wyznaczyć maksymalną odległość s między gwoździami.

