

Notatki z wykładu

Zginanie

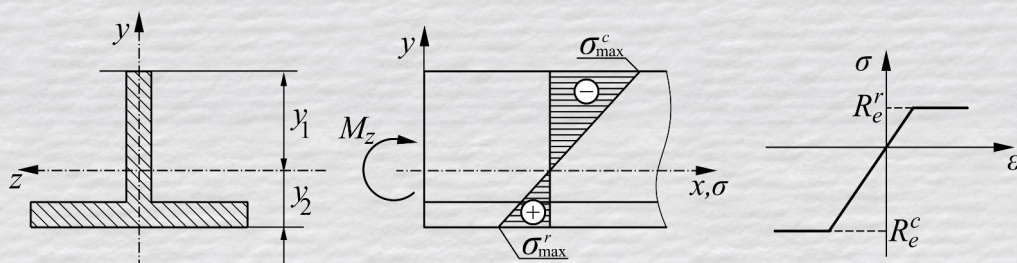
Projektowanie belek

Wprowadzenie

Na poprzednim wykładzie wyprowadziliśmy zależność na naprężenia normalne w belce zginanej. Wiemy, że zgodnie z poniższą zależnością zależą one od wartości momentu gnącego, czyli siły wewnętrznej M , momentu bezwładności przekroju I_z oraz odległości od osi obojętnej y .

$$\sigma = \frac{M \cdot y}{I_z}$$

Widać również, że naprężenia są funkcją liniową odległości od osi. Przyjmują wartość równą zero w osi obojętnej belki, a wartość maksymalną we włóknie najbardziej oddalonym od osi. Znając te dwa punkty, można przeprowadzić prostą, która zdefiniuje rozkład naprężeń na przekroju tak, jak to widać na Rys. 1.



Rys. 1. Przekrój poprzeczny belki, rozkład naprężeń oraz krzywa rozciągania i ściskania materiału belki

Jeżeli przekrój jest niesymetryczny, naprężenia w dolnych i górnych skrajnych włóknach są inne. Przy przekroju symetrycznym będą takie same.

Projektowanie belki zaczynamy od zapisania warunku wytrzymałościowego, który niezależnie od typu obciążenia zawsze ma postać

$$\sigma_{\max} \leq \sigma_{\text{dop}}$$

Dla zginania korzystamy z wyprowadzonego wzoru na naprężenia. Ponieważ jednak zależy nam na wartości maksymalnej naprężeń podstawiamy do wzoru wartość $y_{\max}$. Wartość naprężeń dopuszczalnych, przy obciążeniu statycznym, określamy jako iloraz granicy plastyczności R_e i współczynnika bezpieczeństwa n_e . Mamy zatem

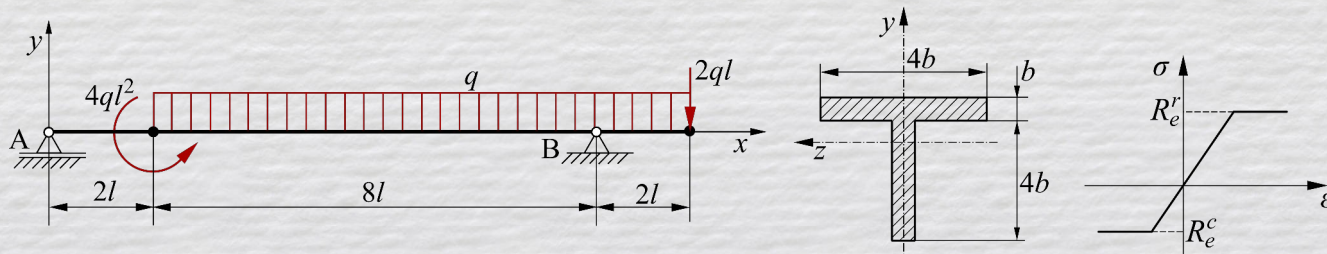
$$\frac{M \cdot y_{\max}}{I_z} \leq \frac{R_e}{n_e}$$

Należy oczywiście uważać, czy naprężenia maksymalne znajdują się po stronie ściskanej czy rozciąganej. Ma to znaczenie, gdy, tak jak na Rys. 1, właściwości mechaniczne materiału są inne dla rozciągania i ściskania

Same obliczenia mogą przebiegać różnie, w zależności od tego co jest dane, a czego szukamy. Zawsze jednak wychodzimy z powyższego warunku wytrzymałościowego.

Przykład obliczeniowy

Jako przykład rozpatrzmy belkę przedstawioną na Rys. 2. Zadane mamy parametry geometryczne l i b oraz obciążenie q . Kształt przekroju poprzecznego jest teowy. Materiał, zgodnie z wykresem na rysunku, ma różne granice plastyczności przy rozciąganiu i ściskaniu. Założmy, że $R_e^r = 120$ MPa, a $R_e^c = 75$ MPa. Przyjmijmy również współczynnik bezpieczeństwa, którego wartość będzie równa $n_e = 3$. Naszym zadaniem będzie sprawdzenie warunku wytrzymałościowego.



Rys. 2. Przykład belki wysięgowej; przekrój poprzeczny; wykres rozciągania i ściskania materiału belki

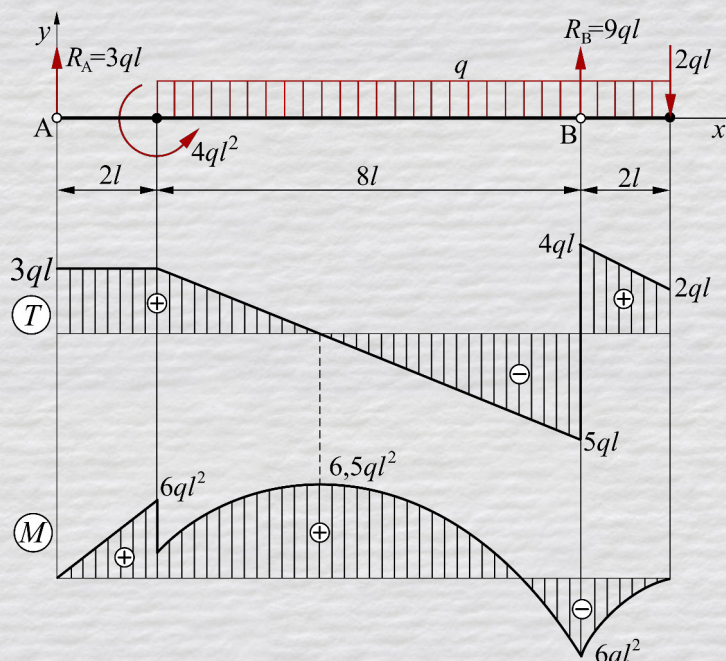
Aby sprawdzić warunek musimy przeanalizować, które wielkości w nim zawarte są dane, a które należy wyznaczyć. Prawą stronę warunku mamy daną. Całą lewą stronę należy wyznaczyć. Wyznaczenie momentu bezwładności będzie polegało na znalezieniu środka ciężkości, a następnie, korzystając z twierdzenia Steinera, na wyznaczeniu momentu bezwładności względem osi centralnej. Jak pamiętamy moment względem tej osi jest najmniejszy, a jak widać ze wzoru na naprężenia, jest on w mianowniku. Oznacza to, że najmniejsza wartość da najbezpieczniejszy (największy) wynik. Wyznaczenie środka ciężkości pozwoli również na określenie y_{max} , ponieważ jest to największa odległość od osi obojętnej – centralnej.

Pozostaje do wyznaczenia moment M . W większości przypadków moment ten, jako siła wewnętrzna, zmienia się na długości belki. I znów, patrząc na warunek wytrzymałościowy interesuje nas wartość największa tego momentu, bo da nam najbezpieczniejszy (największy) wynik. Aby znaleźć maksymalny moment trzeba będzie narysować wykres momentu i odczytać z niego ekstremum. Pamiętajmy jednak, że moment ten może być dodatni lub ujemny, co oznacza, że belka może wyginać się wypukłością w dół lub w górę. W zależności od tego, w różnych punktach belki różne włókna mogą być rozciągane i ściskane. Ma to znaczenie, jeśli materiał zachowuje się różnie przy rozciąganiu i ściskaniu, a tak właśnie jest w naszym przykładzie. Oznacza to, że trzeba będzie sprawdzić dwa warunki wytrzymałościowe – na rozciąganie i na ściskanie.

Zatem kolejność postępowania jest następująca:

- wyznaczyć reakcję w podporach,
- przygotować wykresy sił wewnętrznych – siły poprzecznej i momentu gnącego,
- znaleźć na wykresie momentu wartości ekstremalne,
- wyznaczyć środek ciężkości przekroju, który wyznaczy nam oś centralną i obojętną,
- policzyć moment bezwładności względem osi centralnej,
- wyznaczyć odległości włókien najdalej położonych od osi obojętnej,
- wyznaczyć największe wartości naprężeń,
- sporządzić wykresy rozkładu naprężeń normalnych na przekroju belki,
- zapisać warunki wytrzymałościowe.

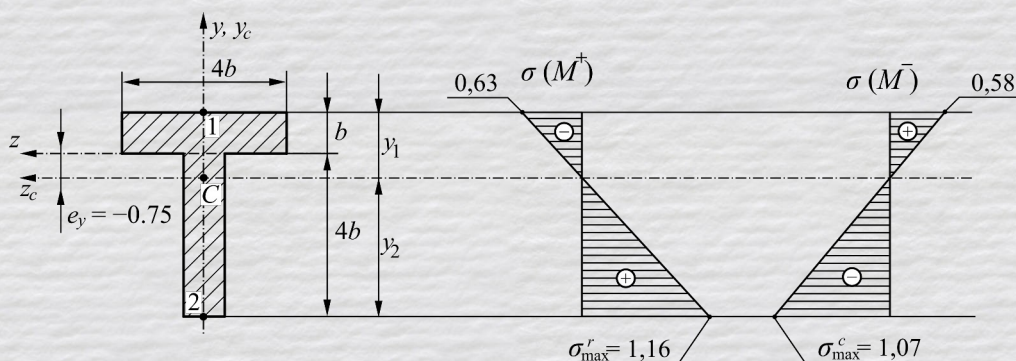
Wartości reakcji wyznaczamy z równań statyki. Metodami poznanymi na poprzednim wykładzie przygotowujemy wykresy sił wewnętrznych i wyznaczamy wartości ekstremalne. Rozwiązanie przedstawiono na Rys. 3.



Rys. 3. Rozkład sił wewnętrznych w belce

Z wykresu momentu widać, że największy moment dodatni, wyginający belkę wypukłością w dół ma wartość $M^+ = 6,5ql^2$, natomiast największy moment ujemny, wyginający belkę wypukłością w górę wynosi $M^- = 8ql^2$.

Kolejnym krokiem jest wyznaczenie środka ciężkości. Zgodnie z Rys. 4 przyjmujemy układ współrzędnych y, z . Ponieważ przekrój jest symetryczny, oś y jest jednocześnie osią centralną y_c . Szukamy zatem poziomej osi centralnej z_c . Wzór na środek ciężkości ma postać



Rys. 4. Rozkład naprężeń w przekrojach niebezpiecznych

$$e_y = \frac{\sum y_i A_i}{\sum A_i} = -0,75 b$$

Moment bezwładności można policzyć dzieląc przekrój na dwa prostokąty – jeden nad przyjętą osią z , a drugi pod nią. Najpierw wyznaczamy moment względem osi z , a następnie, z twierdzenia Steinera, moment względem osi z_c . Mamy zatem

$$I_z = I_{z_1} + I_{z_2} = 22,67 b^4 \text{ oraz } I_{z_c} = I_z - A e_y^2 = 18,2 b^4$$

Znając położenie osi obojętnej możemy wyznaczyć położenie włókien najbardziej od niej oddalonych. Górne skrajne włókna znajdują się w odległości $y_1=1,75b$, natomiast dolne skrajne włókna w odległości $y_2=3,25b$.

Mając powyższe dane można przystąpić do wyznaczania naprężeń maksymalnych. W środku ciężkości przekroju (Rys. 4) mają one wartość 0. Aby sporządzić wykres wystarczy wyznaczyć naprężenia w jeszcze jednym punkcie – tym, najbardziej oddalonym od osi obojętnej. Aby mieć pełen obraz, wyznaczmy wartości w punktach 1 i 2.

Dla momentu dodatniego mamy:

$$\sigma_1 = \frac{M \cdot y_1}{I_z} = \frac{6,5 \text{ q/l} \cdot 1,75 b}{18,2 b^4} = 0,63 \frac{\text{q/l}^2}{b^3} \quad \text{oraz} \quad \sigma_2 = \frac{M \cdot y_2}{I_z} = \frac{6,5 \text{ q/l} \cdot 3,25 b}{18,2 b^4} = 1,16 \frac{\text{q/l}^2}{b^3}$$

Natomiast dla momentu ujemnego

$$\sigma_1 = \frac{M \cdot y_1}{I_z} = \frac{6 \text{ q/l} \cdot 1,75 b}{18,2 b^4} = 0,58 \frac{\text{q/l}^2}{b^3} \quad \text{oraz} \quad \sigma_2 = \frac{M \cdot y_2}{I_z} = \frac{6 \text{ q/l} \cdot 3,25 b}{18,2 b^4} = 1,07 \frac{\text{q/l}^2}{b^3}$$

Na podstawie tych wartości budujemy wykresy, jak na Rys. 4.

Ostatnim etapem jest zapisanie warunków wytrzymałościowych. Z wykresów widać, że największe naprężenia rozciągające jak i ściskające pojawią się w dolnych włóknach belki, choć w innych jej przekrojach. Podstawiając odpowiednie wartości otrzymamy:

$$\sigma_{\max}^c \leq \sigma_{\text{dop}}^c \Rightarrow 1,07 \frac{\text{q/l}^2}{b^3} \leq \frac{75 \text{ MPa}}{3} \Rightarrow \frac{\text{q/l}^2}{b^3} \leq 23,4 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{\max}^r \leq \sigma_{\text{dop}}^r \Rightarrow 1,16 \frac{\text{q/l}^2}{b^3} \leq \frac{120 \text{ MPa}}{3} \Rightarrow \frac{\text{q/l}^2}{b^3} \leq 29,9 \text{ MPa}$$

Z powyższych nierówności widać, że kluczowe znaczenie ma warunek na ściskanie, a punktem niebezpiecznym w belce jest dolna powierzchnia w punkcie podpory B.

Powyższy przykład prezentuje najbardziej ogólny przypadek. Bardzo często jednak przekrój belki jest symetryczny – kwadratowy, prostokątny lub dwuteowy – a materiał zachowuje się tak samo przy ściskaniu i rozciąganiu. Wtedy wystarczy sprawdzić jeden warunek wytrzymałościowy biorąc pod uwagę naprężenia maksymalne oraz granicę plastyczności.

Ponadto, dla przekroi symetrycznych wprowadza się pojęcie **wskaźnika wytrzymałości na zginanie**. Definiuje się go jako

$$W_z = \frac{I_z}{y_{\max}}$$

Parametr $y_{\max}$ jest w takim przypadku połową wysokości belki. Warunek wytrzymałościowy przyjmuje postać

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W_z} \leq \sigma_{\text{dop}}$$

Zadanie formułuje się wtedy często w ten sposób, że dla zadanego materiału (σ_{dop}) oraz zadanego obciążenia (M) wyznacza się wymaganą wartość wskaźnika W_z

$$W_z \geq \frac{M}{\sigma_{dop}}$$

Wartości wskaźnika wytrzymałości na zginanie są dostępne w katalogach dostawców belek. Dla wyznaczonej wartości i materiału można wybrać żądany profil lub kilka profili, z który wybiera się ten, spełniający również inne wymagania.