

Mechanika i Wytrzymałość Materiałów

Zginanie Siły wewnętrzne w belce

opracował:

dr hab. inż. Paweł JASION

e-mail: `pawel.jasion@put.poznan.pl`

www: `pawel.jasion.pracownik.put.poznan.pl`

Politechnika Poznańska
Instytut Mechaniki Stosowanej
Zakład Wytrzymałości Materiałów i Konstrukcji

1 Wprowadzenie

- Typy belek, obciążeń i podpór
- Siły poprzeczne i momenty gnące

2 Wyznaczanie sił wewnętrznych

- Wpływ obciążenia na wartości sił wewnętrznych
- Wykresy sił poprzecznych i momentów gnących

Plan wykładu

1 Wprowadzenie

- Typy belek, obciążeń i podpór
- Siły poprzeczne i momenty gnące

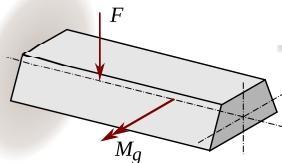
2 Wyznaczanie sił wewnętrznych

- Wpływ obciążenia na wartości sił wewnętrznych
- Wykresy sił poprzecznych i momentów gnących

Typy belek

Belka

element konstrukcyjny obciążony w kierunku poprzecznym;
wektory sił i momentów są prostopadłe do osi pręta



belka swobodnie podparta



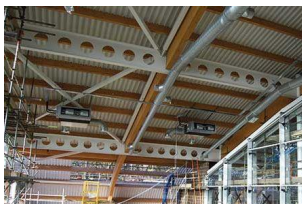
belka z częścią wysięgową



belka utwierdzona

Przykłady zastosowania belek

- belki używane są przy budowie konstrukcji nośnych oraz ram pojazdów; proste wsporniki również klasyfikowane są jako belki

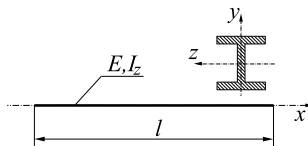


Modelowanie belek

- belka jest liniowym elementem konstrukcyjnym
- modeluje się ją zatem fragmentem prostej, do której przypisuje się odpowiednie właściwości



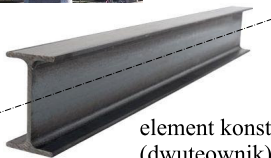
konstrukcja
wiaduktu



model belki

- długość
- materiał
- przekrój poprzeczny

oś obojętna

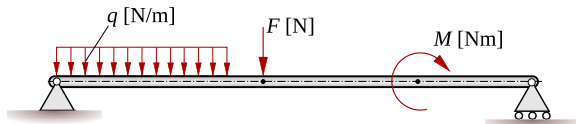


element konstrukcyjny
(dwuteownik)

Typy obciążeń

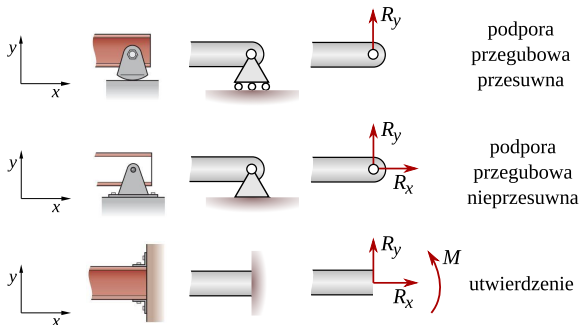
Wektory opisujące obciążenie belki skierowane są prostopadle do jej osi; możliwe są zatem następujące przypadki obciążenia:

- obciążenie punktowe
 - siła skupiona (człowiek stojący na kładce)
 - moment skupiony
- intensywność obciążenia
 - siła rozłożona na odcinku (pociąg stojący na moście)



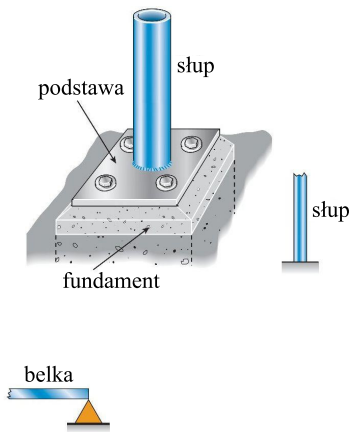
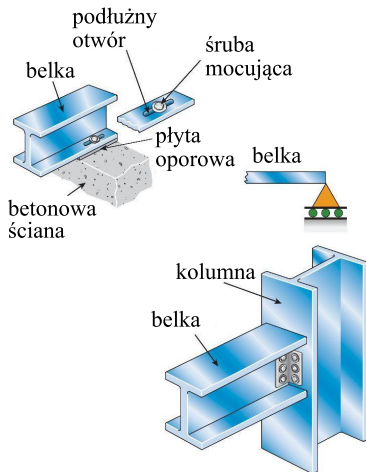
Typy podparcia

- belka może być podparta przez jedną z trzech podpór
- poniżej przedstawiono schemat realizacji podparcia, model podpory i reakcje, jakie się w niej pojawiają



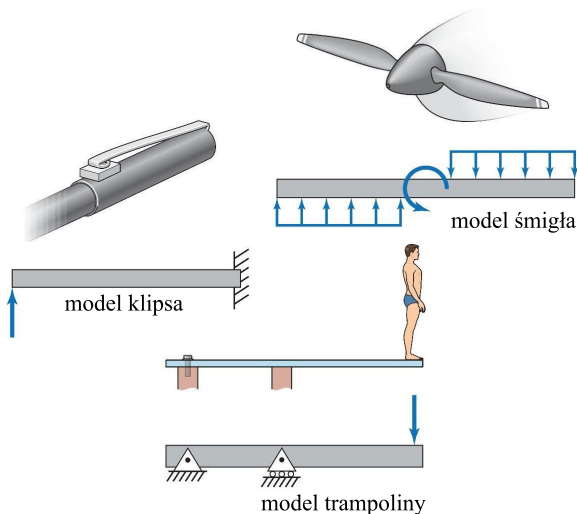
Typy podparcia

Modelowanie podpór [Gere, Goodno, 2009]



Typy podparcia

Elementy pracujące jako belki [Steif, 2012]



Plan wykładu

1 Wprowadzenie

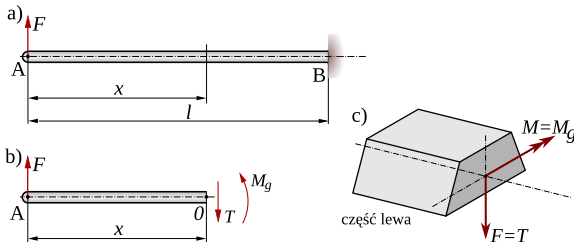
- Typy belek, obciążeń i podpór
- Siły poprzeczne i momenty gnące

2 Wyznaczanie sił wewnętrznych

- Wpływ obciążenia na wartości sił wewnętrznych
- Wykresy sił poprzecznych i momentów gnących

Siły wewnętrzne w belce

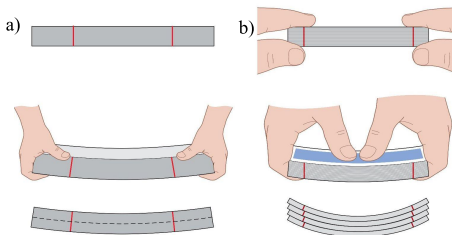
- belka AB obciążona jest siłą poprzeczną F
- aby lewa, odcięta w odległości x , część pozostawała w równowadze, w miejscu przecięcia należy wprowadzić siły wewnętrzne:
 - siłę poprzeczną (tnącą) T (równoważy przemieszczenie pionowe)
 - moment gnący M_g (równoważy obrót)



Siły wewnętrzne w belce

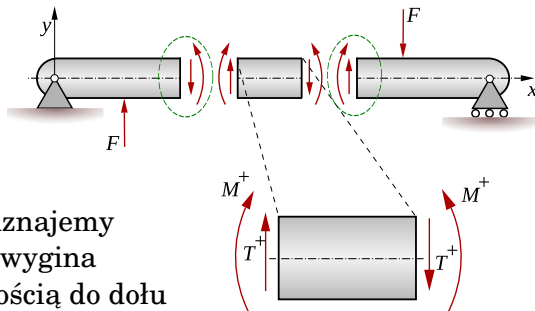
[Steif, 2012]

- o występowaniu naprężeń poprzecznych można przekonać się wykonując proste doświadczenie
- linia prosta, narysowana na belce (a) obraca się po ugięciu, ale pozostaje ciągła
- jeśli belka złożona jest z wielu cienkich warstw (b), to linia rozdziela się; każdy z odcinków obraca się, ale w sumie dalej tworzą one linię prostą, jak przed ugięciem



Konwencja znaków

- znaki sił wewnętrznych definiujemy dla wyciętego elementu belki

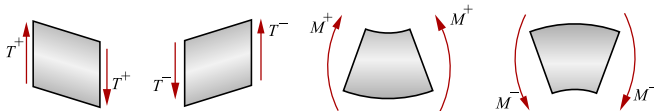


- moment gnący uznajemy za dodatni, jeśli wygina element wypukłością do dołu
- siłę poprzeczną uznajemy za dodatnią, jeśli obraca element zgodnie z ruchem wskazówek zegara

Konwencja znaków

Konwencja znaków przy deformacji

używana do opisu składowych naprężeń; znak zależy od tego, jak siła odkształca materiał



Statyczna konwencja znaków

używana przy zapisie równań równowagi; znak zależy od kierunku siły względem osi współrzędnych



Plan wykładu

1 Wprowadzenie

- Typy belek, obciążeń i podpór
- Siły poprzeczne i momenty gnące

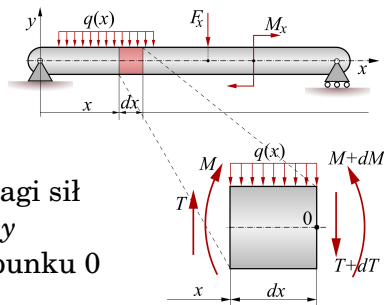
2 Wyznaczanie sił wewnętrznych

- Wpływ obciążenia na wartości sił wewnętrznych
- Wykresy sił poprzecznych i momentów gnących

Wpływ intensywności siły $q(x)$

Zależności różniczkowe między q , T i M

- aby znaleźć wpływ intensywności siły $q(x)$ na siły wewnętrzne w belce, rozpatrzmy równowagę elementarnego wycinka belki znajdującego się pod działaniem takiego obciążenia

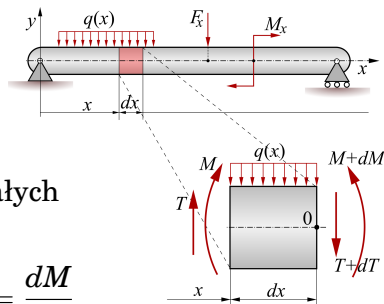


- zapiszmy równania równowagi sił poprzecznych względem osi y oraz momentów względem punktu 0

Wpływ intensywności siły $q(x)$

Zależności różniczkowe między q , T i M

- aby znaleźć wpływ intensywności siły $q(x)$ na siły wewnętrzne w belce, rozpatrzmy równowagę elementarnego wycinka belki znajdującego się pod działaniem takiego obciążenia

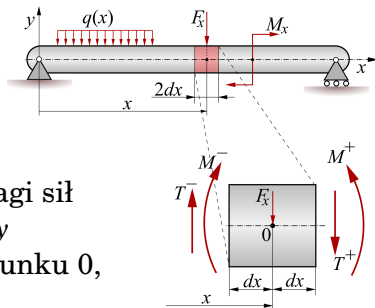


- z równań, po pominięciu małych drugiego rzędu otrzymamy

$$-q(x) = \frac{dT}{dx} = \frac{d^2M}{dx^2}, \quad T = \frac{dM}{dx}$$

Wpływ siły skupionej F_x

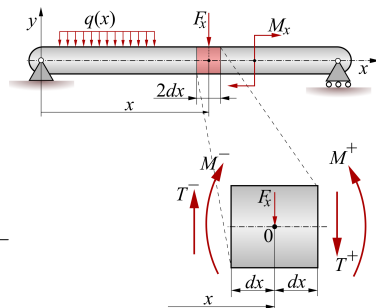
- aby znaleźć wpływ siły skupionej F_x na siły wewnętrzne w belce, rozpatrzmy równowagę elementarnego wycinka belki znajdującego się pod działaniem takiego obciążenia



- zapiszmy równania równowagi sił poprzecznych względem osi y oraz momentów względem punktu 0, przy czym
 $T^- = T(x - dx)$ i $T^+ = T(x + dx)$

Wpływ siły skupionej F_x

- aby znaleźć wpływ siły skupionej F_x na siły wewnętrzne w belce, rozpatrzmy równowagę elementarnego wycinka belki znajdującego się pod działaniem takiego obciążenia

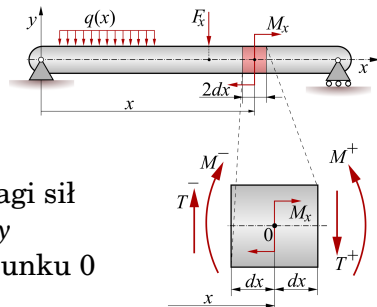


- z równań otrzymamy

$$T^+ = T^- - F_x, \quad M^+ = M^-$$

Wpływ momentu skupionego M_x

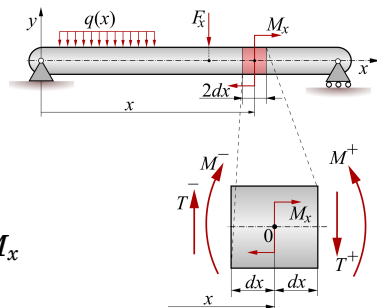
- aby znaleźć wpływ momentu skupionego M_x na siły wewnętrzne w belce, rozpatrzmy równowagę elementarnego wycinka belki znajdującego się pod działaniem takiego obciążenia



- zapiszmy równania równowagi sił poprzecznych względem osi y oraz momentów względem punktu 0

Wpływ momentu skupionego M_x

- aby znaleźć wpływ momentu skupionego M_x na siły wewnętrzne w belce, rozpatrzmy równowagę elementarnego wycinka belki znajdującego się pod działaniem takiego obciążenia

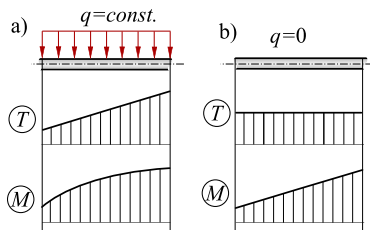


- z równań otrzymamy

$$T^+ = T^-, \quad M^+ = M^- + M_x$$

Analiza wykresów sił wewnętrznych

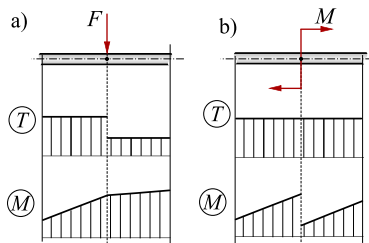
- znajomość wyprowadzonych wcześniej zależności pozwala sprawnie tworzyć wykresy sił wewnętrznych oraz sprawdzać ich poprawność; wynika z nich, że:
 - siła poprzeczna i moment są funkcjami różniącymi się o jeden rząd; jeśli obciążenie $q(x)$ jest stałe wzdłuż długości belki, to siła poprzeczna $T(x)$ jest funkcją liniową, a moment $M(x)$ jest funkcją kwadratową
 - jeśli intensywność obciążenia skierowana jest w dół, to wykres momentu skierowany jest wypukłością w górę, i odwrotnie



Analiza wykresów sił wewnętrznych

• ...(cd)

- siła skupiona, przyłożona do belki powoduje powstanie na wykresie sił uskoku, równego tej sile, a na wykresie momentu wywołuje zmianę kąta nachylenia przylegających fragmentów wykresu
- moment skupiony, przyłożony do belki powoduje powstanie na wykresie momentów uskoku, równego temu momentowi; wykres sił nie zmienia się



Plan wykładu

1 Wprowadzenie

- Typy belek, obciążeń i podpór
- Siły poprzeczne i momenty gnące

2 Wyznaczanie sił wewnętrznych

- Wpływ obciążenia na wartości sił wewnętrznych
- Wykresy sił poprzecznych i momentów gnących

Wykresy sił poprzecznych

Schemat rozwiązywania zadań

Zadanie wyznaczenia sił wewnętrznych w belce należy przeprowadzić wg poniższego schematu:

- wprowadzić układ współrzędnych z początkiem na lewym końcu belki oraz oznaczyć punkty charakterystyczne wielkimi literami (A, B, itd.)
- uwolnić układ od więzów, wprowadzając zamiast podpór odpowiednie reakcje
- wyznaczyć wartości reakcji z równań równowagi; zaleca się użycie dwóch równań momentów do wyznaczenia wartości reakcji, a następnie równania sił, do sprawdzenia poprawności obliczeń

Wykresy sił poprzecznych

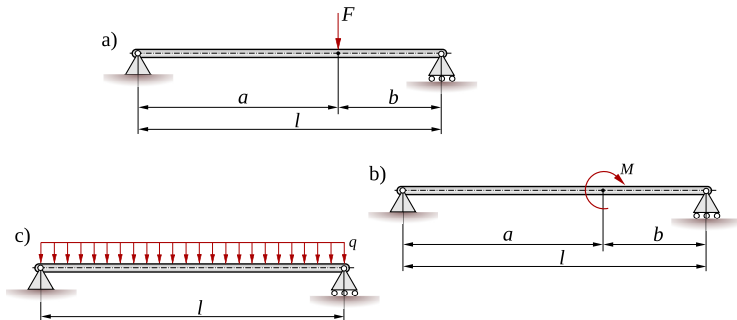
Schemat rozwiązywania zadań (cd)

- podzielić belkę na przedziały; kolejne przedziały wprowadzamy od lewej strony tam, gdzie zmienia się: obciążenie, materiał, przekrój poprzeczny
- dla każdego przedziału, z warunków równowagi, zapisać równania sił wewnętrznych
- sporządzić wykresy sił wewnętrznych na podstawie otrzymanych wcześniej równań

Wykresy sił poprzecznych

Proste przypadki obciążenia

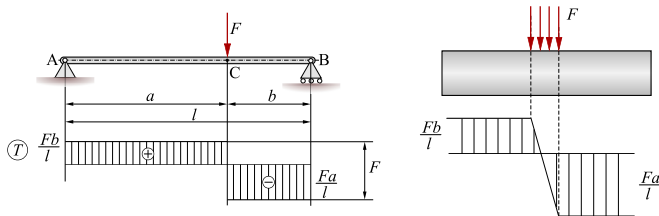
Rozpocznijmy od najprostszych przykładów, które pozwolą nam sprawdzić, jak poszczególne typy obciążenia wpływają na kształt wykresów sił wewnętrznych w całej belce.



Analiza wykresów sił wewnętrznych

Siła skupiona

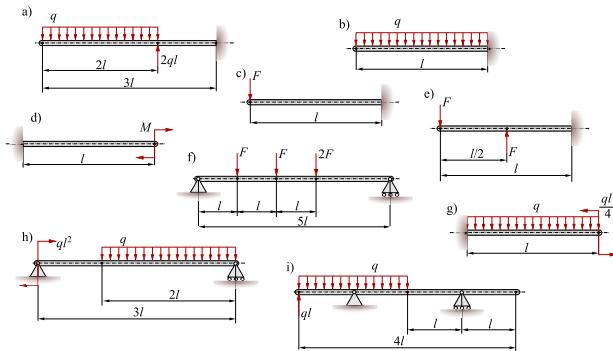
- przyjrzyjmy się rozkładowi sił poprzecznych dla poniższego przykładu
- na wykresie pojawia się uskok równy sile F
- jednak wartość siły w tym punkcie nie jest równa F ; z lewej strony wykresu jest równa $(Fb)/l$, a z prawej $(Fa)/l$
- jest to oczywiste, jeśli urealnimy siłę skupioną F , która w rzeczywistości jest rozłożona na niewielkim odcinku belki



Wykresy sił poprzecznych

Przykłady do samodzielnego rozwiązania

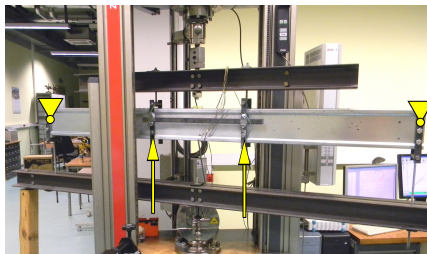
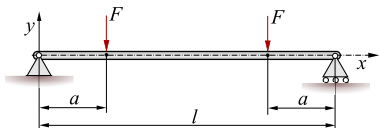
Dla belek przedstawionych na rysunkach wyznaczyć wykresy sił wewnętrznych: siły poprzecznej T i momentu gnącego M .
Zastanowić się, jak zmiana wartości obciążenia lub miejsca jego przyłożenia wpłynie na kształt wykresów sił wewnętrznych.



Wykresy sił poprzecznych

Przykład

- ważnym przypadkiem jest belka obciążona symetrycznie dwoma siłami
- z wykresów sił widać, że pomiędzy siłami obciążającymi nie ma sił poprzecznych a moment ma wartość stałą
- w tym obszarze panuje **czyste zginanie**, co wykorzystuje się w badaniach eksperymentalnych



Wykresy sił poprzecznych

Przykład – rozwiązanie

Przeanalizować poniższe rozwiązanie.

