

Mechanika i Wytrzymałość Materiałów

Parametry geometryczne przekroju poprzecznego

opracował:

dr hab. inż. Paweł JASION

e-mail: `pawel.jasion@put.poznan.pl`

www: `pawel.jasion.pracownik.put.poznan.pl`

Politechnika Poznańska

Instytut Mechaniki Stosowanej

Zakład Wytrzymałości Materiałów i Konstrukcji

- 1 Wyznaczanie środka ciężkości
 - Pole powierzchni figury płaskiej
 - Moment statyczny
 - Środek ciężkości

- 2 Momenty bezwładności
 - Osiowy moment bezwładności
 - Biegunowy moment bezwładności

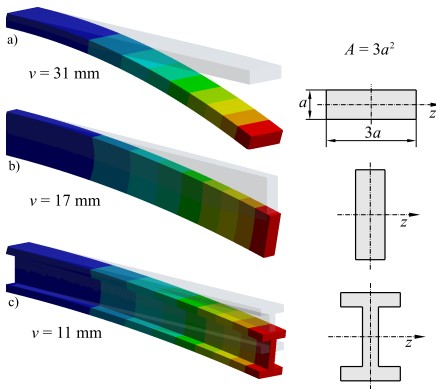
- 3 Twierdzenie Steinera
 - Zastosowanie twierdzenia

Charakterystyka przekroju poprzecznego

- liniowe elementy konstrukcyjne typu pręt, wał czy belka, upraszcza się do linii prostej i przypisuje im przekrój poprzeczny
- siły wewnętrzne działające w takim elemencie przykłada się do środka ciężkości przekroju poprzecznego
- należy zatem umieć określić położenie środka ciężkości oraz zdefiniować parametry opisujące właściwości przekroju poprzecznego

Charakterystyka przekroju poprzecznego

- w zależności od **kształtu** przekroju poprzecznego elementu konstrukcyjnego, może on wykazywać różną sztywność nawet, jeśli **pole powierzchni** tego przekroju jest takie samo



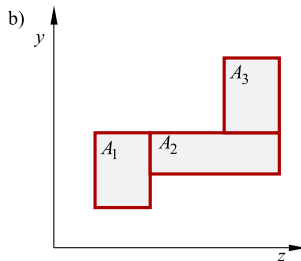
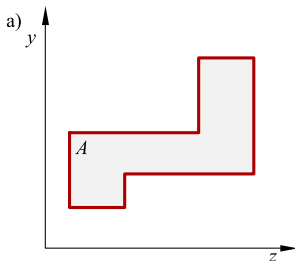
Plan prezentacji

- 1 Wyznaczanie środka ciężkości
 - Pole powierzchni figury płaskiej
 - Moment statyczny
 - Środek ciężkości
- 2 Momenty bezwładności
 - Osiowy moment bezwładności
 - Biegunowy moment bezwładności
- 3 Twierdzenie Steinera
 - Zastosowanie twierdzenia

Pole powierzchni figury płaskiej

Definicja

$$A = \sum_{i=1}^n A_i$$



Plan prezentacji

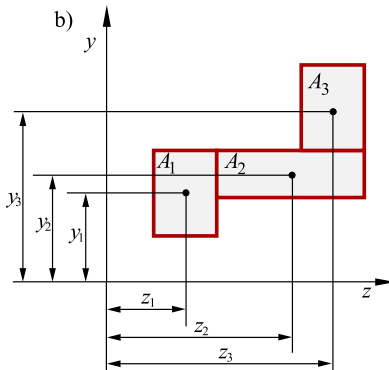
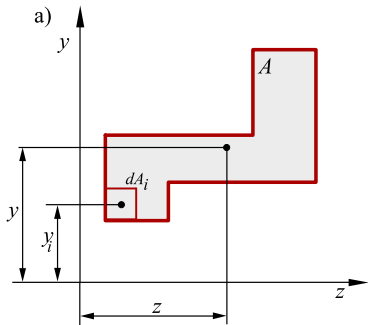
- 1 Wyznaczanie środka ciężkości
 - Pole powierzchni figury płaskiej
 - **Moment statyczny**
 - Środek ciężkości
- 2 Momenty bezwładności
 - Osiowy moment bezwładności
 - Biegunowy moment bezwładności
- 3 Twierdzenie Steinera
 - Zastosowanie twierdzenia

Moment statyczny

Definicja

$$S_z = yA = \sum_{i=1}^n y_i A_i,$$

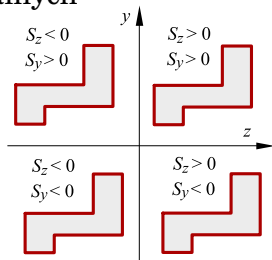
$$S_y = zA = \sum_{i=1}^n z_i A_i$$



Moment statyczny

Własności momentu statycznego:

- znak zależy od położenia względem osi
- addytywność: $S_z(A) = S_z(A_1) + S_z(A_2)$
- oś, względem której $S_z = 0$ nazywa się osią centralną i oznaczana jest jako S_{zc}
- punkt przecięcia się dwóch osi centralnych jest **środkiem ciężkości przekroju**



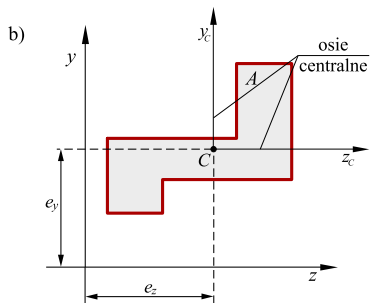
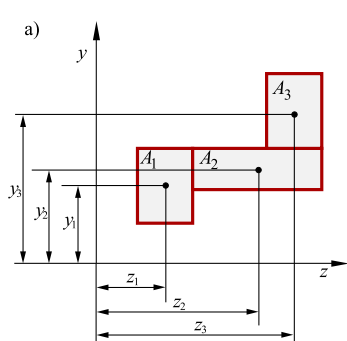
Plan prezentacji

- 1 Wyznaczanie środka ciężkości
 - Pole powierzchni figury płaskiej
 - Moment statyczny
 - Środek ciężkości
- 2 Momenty bezwładności
 - Osiowy moment bezwładności
 - Biegunowy moment bezwładności
- 3 Twierdzenie Steinera
 - Zastosowanie twierdzenia

Środek ciężkości

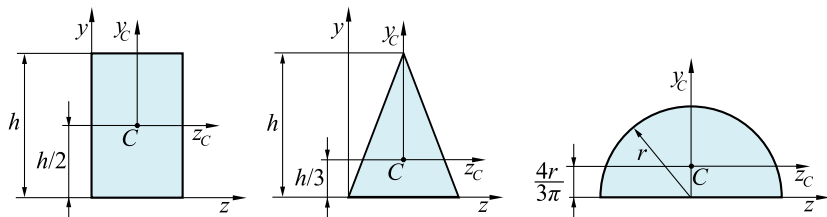
Współrzędne środka ciężkości

$$e_z = \frac{S_y}{A} = \frac{\sum_{i=1}^n z_i A_i}{\sum_{i=1}^n A_i}, \quad e_y = \frac{S_z}{A} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i A_i}{\sum_{i=1}^n A_i}$$



Środek ciężkości

Położenie środka ciężkości figur prostych

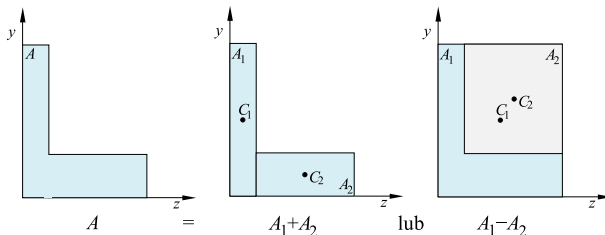


Osie centralne

osie przechodzące przez środek ciężkości przekroju;
oznaczamy je dodając indeks „c” do nazwy osi – y_c , z_c

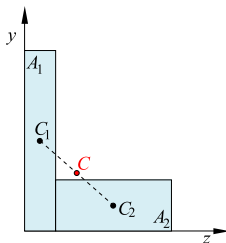
Środek ciężkości – przekroje złożone

- środek ciężkości przekrojów złożonych znajduje się, dzieląc je na figury proste
- w przypadku przekrojów z wycięciem, pole figury wyciętej traktuje się jako ujemne



Środek ciężkości – przekroje złożone

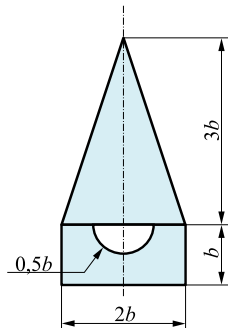
- środek ciężkości przekrojów złożonych znajduje się, dzieląc je na figury proste
- w przypadku przekrojów z wycięciem, pole figury wyciętej traktuje się jako ujemne
- jeśli przekrój składa się z dwóch figur, środek ciężkości przekroju leży na linii łączącej środki ciężkości figur



Środek ciężkości – przekroje złożone

Wyznaczyć środek ciężkości figury przedstawionej na rysunku.

$$e_y = \frac{S_z}{A} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i A_i}{\sum_{i=1}^n A_i}$$



Plan prezentacji

- 1 Wyznaczanie środka ciężkości
 - Pole powierzchni figury płaskiej
 - Moment statyczny
 - Środek ciężkości
- 2 Momenty bezwładności
 - Osiowy moment bezwładności
 - Biegunowy moment bezwładności
- 3 Twierdzenie Steinera
 - Zastosowanie twierdzenia

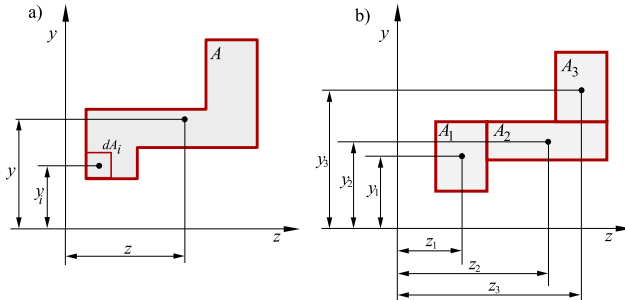
Osiowy moment bezwładności

Definicja

$$I_z = \sum y_i^2 dA_i, \quad I_y = \sum z_i^2 dA_i$$

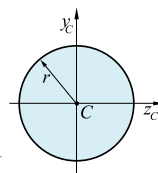
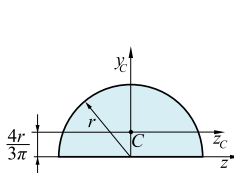
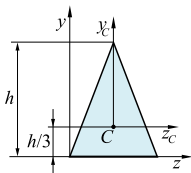
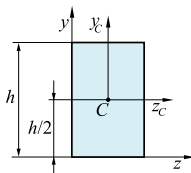
Osiowy moment bezwładności jest wielkością addytywną

$$I_z = I_{z_1} + I_{z_2} + I_{z_3}$$



Osiowy moment bezwładności – przykłady

Zależności na momenty bezwładności figur prostych można znaleźć w tablicach wytrzymałościowych.



$$I_z = \frac{bh^3}{3}$$

$$I_{zc} = \frac{bh^3}{12}$$

$$I_z = \frac{bh^3}{12}$$

$$I_{zc} = \frac{bh^3}{36}$$

$$I_{yc} = \frac{bh^3}{48}$$

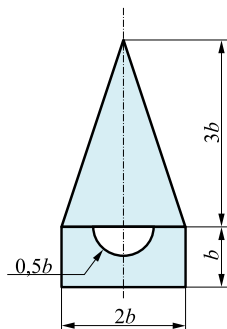
$$I_z = I_{yc} = \frac{\pi r^4}{8}$$

$$I_{zc} = 0,11r^4$$

$$I_{zc} = I_{yc} = \frac{\pi r^4}{4}$$

Środek ciężkości – przekroje złożone

Wyznaczyć osiowy moment bezwładności figury przedstawionej na rysunku.



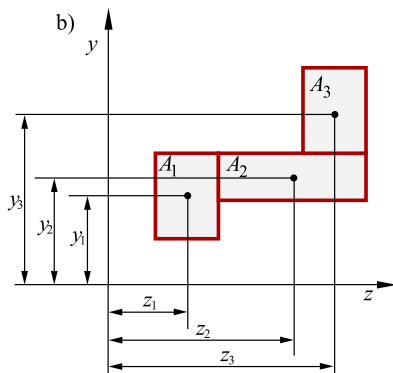
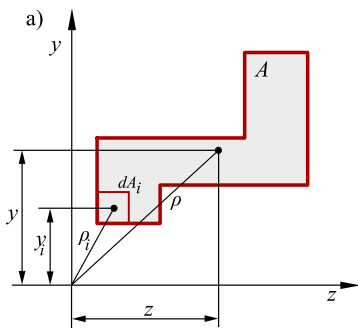
Plan prezentacji

- 1 Wyznaczanie środka ciężkości
 - Pole powierzchni figury płaskiej
 - Moment statyczny
 - Środek ciężkości
- 2 Momenty bezwładności
 - Osiowy moment bezwładności
 - Biegunowy moment bezwładności
- 3 Twierdzenie Steinera
 - Zastosowanie twierdzenia

Biegunowy moment bezwładności

Definicja

$$I_0 = \sum \rho_i^2 dA_i$$



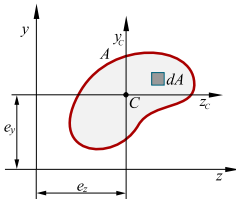
Plan prezentacji

- 1 Wyznaczanie środka ciężkości
 - Pole powierzchni figury płaskiej
 - Moment statyczny
 - Środek ciężkości
- 2 Momenty bezwładności
 - Osiowy moment bezwładności
 - Biegunowy moment bezwładności
- 3 Twierdzenie Steinera
 - Zastosowanie twierdzenia

Twierdzenie Steinera

Twierdzenie Steinera

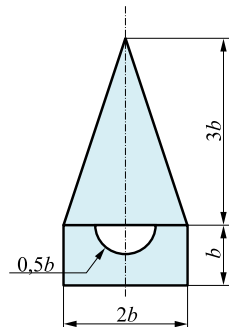
$$I_z = I_{zc} + Ae_y^2$$



Twierdzenie Steiner'a pozwala wyznaczyć moment bezwładności przekroju względem osi centralnej, jeżeli znany jest moment względem innej dowolnej osi i odległość między osiami.

Twierdzenie Steinera

Wyznaczyć osiowy centralny moment bezwładności figury przedstawionej na rysunku.



Profile rzeczywiste

W przypadku przekroi poprzecznych utworzonych z kształtowników walcowanych na zimno położenie środka ciężkości, położenie osi głównych centralnych oraz wartości momentów bezwładności odczytuje się z katalogu producenta.

