

Wytrzymałość Materiałów I

Osiowe rozciąganie i ściskanie prętów

opracował:

dr hab. inż. Paweł JASION

e-mail: `pawel.jasion@put.poznan.pl`

www: `pawel.jasion.pracownik.put.poznan.pl`

Politechnika Poznańska

Instytut Mechaniki Stosowanej

Zakład Wytrzymałości Materiałów i Konstrukcji

Plan prezentacji

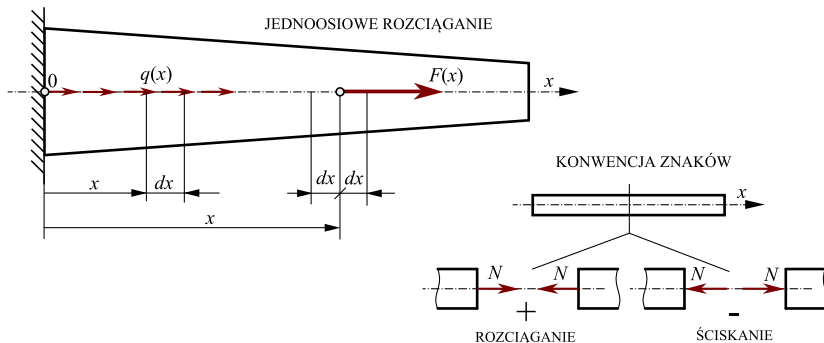
- 1 Definicja i przykłady czystego rozciągania
- 2 Zależności statyczne, geometryczne i fizyczne
- 3 Rozwiązywanie zadań
 - Rozwiązywanie zadań statycznie wyznaczalnych
 - Rozwiązywanie zadań statycznie niewyznaczalnych
- 4 Energia odkształcenia sprężystego
- 5 Jednoosiowy stan naprężeń

Rozciąganie-ściskanie – przykłady



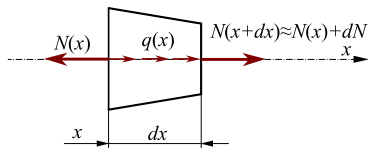
Równowaga wycinka pręta – $N(x) \sim q(x)$

- możliwe są dwa rodzaje obciążenia: siła przyłożona w punkcie i intensywność obciążenia
- konwencja znaków: jako dodatnią określamy siłą, która próbuje rozciągnąć odciętą część pręta



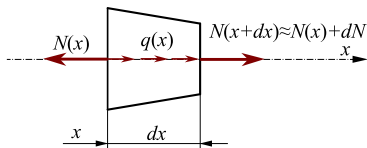
Równowaga wycinka pręta – $N(x) \sim q(x)$

- wycięty fragment pręta



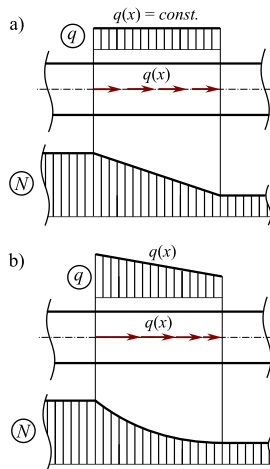
Równowaga wycinka pręta – $N(x) \sim q(x)$

- wycięty fragment pręta



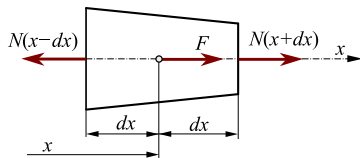
- zależność różniczkowa opisująca siły w pręcie ma postać

$$-q(x) = \frac{dN}{dx}$$



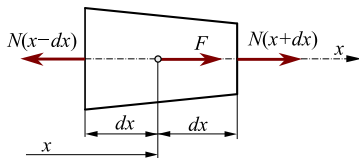
Równowaga wycinka pręta – $N(x) \sim q(x)$

- wycięty fragment pręta



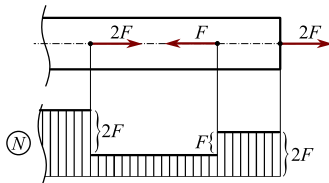
Równowaga wycinka pręta – $N(x) \sim q(x)$

- wycięty fragment pręta



- zależność opisująca siłę w przekroju pręta ma postać

$$N(x) = \sum_{i=1}^n F_i$$



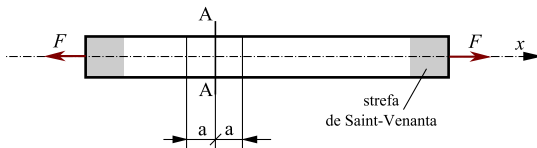
Zależności geometryczne – $\varepsilon(x) \sim u(x)$

Osiowe rozciąganie – ściskanie

taki stan obciążenia, przy którym oś pręta prosta przed odkształceniem pozostaje prosta po odkształceniu; pojawiają się jedynie siły osiowe

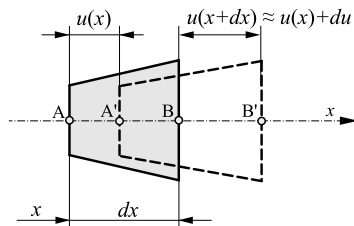
Hipoteza płaskich przekrojów (hipoteza Mariotta-Bernoulliego)

przy rozciąganiu-ściskaniu pręta, jego przekroje poprzeczne, płaskie przed odkształceniem, po odkształceniu pozostają płaskie i normalne do osi pręta



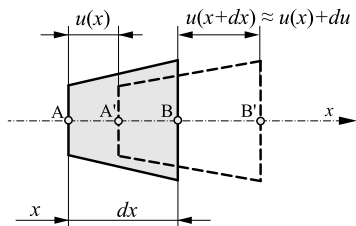
Zależności geometryczne – $\varepsilon(x) \sim u(x)$

- rozpatrzmy deformację elementarnego wycinka pręta o długości dx
- punkt A przemieści się o $u(x)$ do punktu A'; punkt B przemieści się o $u(x)$ plus przyrost du do punktu B'



Zależności geometryczne – $\varepsilon(x) \sim u(x)$

- rozpatrzmy deformację elementarnego wycinka pręta o długości dx
- punkt A przemieści się o $u(x)$ do punktu A'; punkt B przemieści się o $u(x)$ plus przyrost du do punktu B'

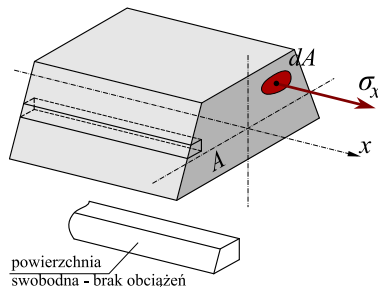


- z definicji odkształcenia wiemy, że $\varepsilon = \Delta dx / dx$, zatem

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta dx}{dx} = \frac{u(x) + du - u(x)}{dx} \rightarrow \varepsilon_x = \frac{du}{dx}$$

Zależności fizyczne – $\sigma(x) \sim \varepsilon(x)$

- związki fizyczne możemy wyznaczyć przyjmując:
 - hipotezę płaskich przekrojów
 - wyniki badań eksperymentalnych
- elementarna siła na przekroju: $dN = \sigma dA$



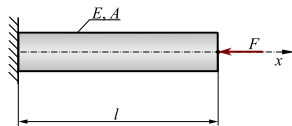
Plan prezentacji

- 1 Definicja i przykłady czystego rozciągania
- 2 Zależności statyczne, geometryczne i fizyczne
- 3 Rozwiązanie zadań**
 - Rozwiązanie zadań statycznie wyznaczalnych
 - Rozwiązanie zadań statycznie niewyznaczalnych
- 4 Energia odkształcenia sprężystego
- 5 Jednoosiowy stan naprężeń

Rozwiązywanie zadań statycznie wyznaczalnych

Pręt pryzmatyczny obciążony siłą osiową

*w każdym punkcie pręta
pryzmatycznego siła wewnętrzna N
oraz naprężenia σ są takie same*



- w przypadku, gdy zadanie polega na **analizie konstrukcji**, wyznaczamy wartość naprężeń σ oraz wydłużenie całkowite pręta Δl z zależności

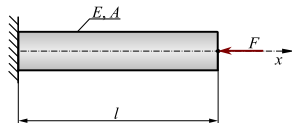
$$\sigma = \frac{N}{A}, \quad \Delta l = \frac{Nl}{EA}$$

- z zależności na Δl można również wyznaczyć przemieszczenie dowolnego punktu pręta

Rozwiązywanie zadań statycznie wyznaczalnych

Pręt pryzmatyczny obciążony siłą osiową

- w przypadku, gdy zadanie ma **charakter projektowy** korzystamy z dwóch możliwych warunków: wytrzymałościowego i sztywnościowego



$$\sigma \leq \sigma_{dop}, \quad \Delta l \leq \Delta l_{dop}$$

- dla czystego rozciągania mamy

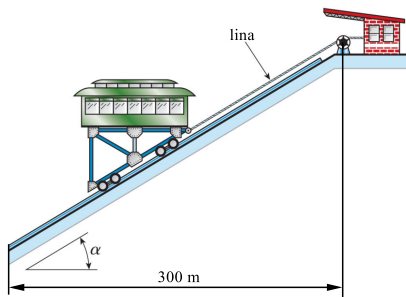
$$\frac{F}{A} \leq \frac{R_e}{n_e}, \quad \frac{Fl}{EA} \leq \Delta l_{dop}$$

- w zależności od sformułowania zadania z powyższych nierówności wyznaczamy szukaną wielkość

Rozwiązanie zadań statycznie wyznaczalnych

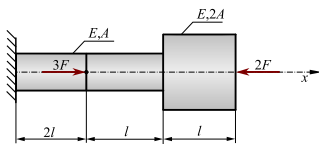
Pręt pryzmatyczny obciążony siłą osiową

W pełni obciążony wagonik ważący 13 ton wciągany jest powoli po pochyłym torze przez stalową linę. Efektywny przekrój poprzeczny liny to 490 mm^2 . Pochylenie toru $\alpha = 30^\circ$. Wyznaczyć naprężenia w linie oraz maksymalne wydłużenie liny.



Pręt obciążony kilkoma siłami

- jeśli pręt nie jest pryzmatyczny, tzn. na długości pręta zmienia się przekrój poprzeczny, materiał lub obciążenie, wtedy dzielimy go na przedziały
- nowy przedział definiuje się tam, gdzie pojawia się jedna z powyższych zmian
- każdy przedział traktujemy jak pręt pryzmatyczny
- zadanie rozpoczynamy od wyznaczenia reakcji w podporze, zapisując równanie sumy rzutów sił na oś pręta



Rozwiązywanie zadań statycznie wyznaczalnych cd.

Pręt obciążony kilkoma siłami

- aby mieć pełen obraz tego, co dzieje się w pręcie, wykonujemy wykresy:
 - sił normalnych, używając zależności statyki

$$N(x) = \sum_{i=1}^n F_i$$

- naprężeń normalnych, używając zależności fizycznych

$$\sigma = \frac{N}{A}$$

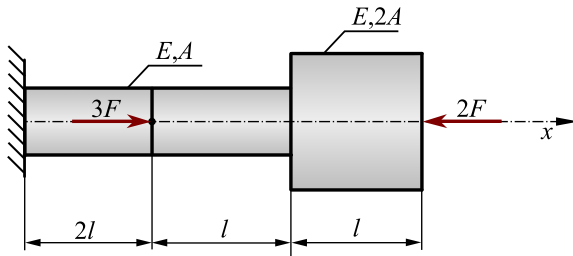
- przemieszczeń, używając zależności geometrycznych

$$u(x) = u_0(x) + \Delta l_i$$

Rozwiązanie zadań statycznie wyznaczalnych cd.

Pręt obciążony kilkoma siłami

Dla pręta o przekroju poprzecznym opisanym przez parametr A i module Younga E narysować wykresy sił wewnętrznych, naprężeń i przemieszczeń.

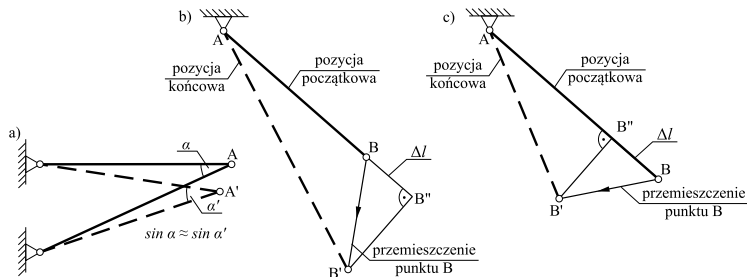


Rozwiązywanie zadań statycznie wyznaczalnych cd.

Układy prętowe

Założenia przy obliczaniu układów prętów

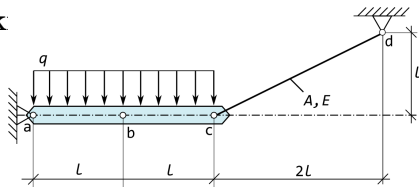
- odkształcenia konstrukcji są małe – zmiany kątów między prętami są tak małe, że nie zmieniają wartości funkcji trygonometrycznych tych kątów
- końce prętów przemieszczają się przy obrocie wzdłuż prostych prostopadłych do osi prętów



Rozwiązywanie zadań statycznie wyznaczalnych cd.

Układ pręt-ciało sztywne

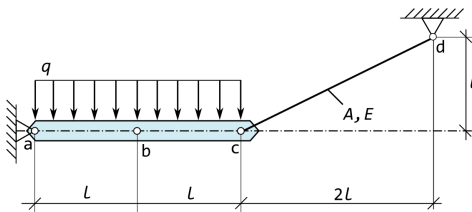
1. Metodami statyki wyznaczamy siłę wewnętrzną N w pręcie
2. Z prawa Hooke'a wyznaczamy wydłużenie Δl pręta
3. Metodą geometryczną wyznaczamy przemieszczenia wybranych punktów
4. Z warunku wytrzymałościowego określamy wielkość przekroju pręta



Rozwiązywanie zadań statycznie wyznaczalnych cd.

Układ pręt-ciało sztywne

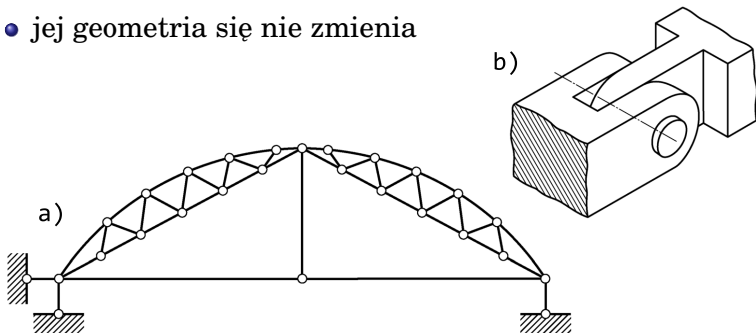
Układ pręt-ciało sztywne obciążony jest intensywnością q . Wyznaczyć przemieszczenie punktu b, przyjmując przekrój pręta równy A i moduł Younga E .



Układy prętowe

Układ prętów nazywamy **kratownicą**, jeżeli:

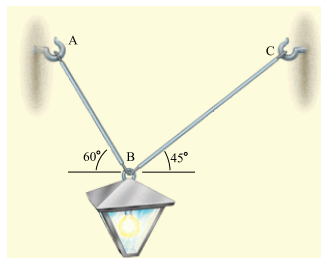
- jej elementy są prętami prostymi i przenoszą tylko obciążenia rozciągające i ściskające
- jej węzły i podpory są przegubami
- jej geometria się nie zmienia



Rozwiązywanie zadań statycznie wyznaczalnych cd.

Układy prętowe

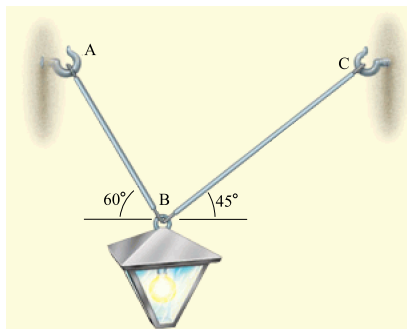
1. Metodami statyki wyznaczamy siły wewnętrzne N_i w prętach
2. Z prawa Hooke'a wyznaczamy wydłużenie Δl_i prętów
3. Metodą geometryczną wyznaczamy przemieszczenia wybranych punktów
4. Z warunku wytrzymałościowego określamy wielkość przekrojów poprzecznych prętów



Rozwiązywanie zadań statycznie wyznaczalnych cd.

Układy prętowe

Lampa ważąca 80 kg jest podwieszona na dwóch prętach AB i BC. Przyjmując średnicę pręta AB równą 10 mm i pręta BC równą 8 mm, wyznaczyć naprężenia normalne w każdym pręcie oraz przemieszczenie lampy.



Plan prezentacji

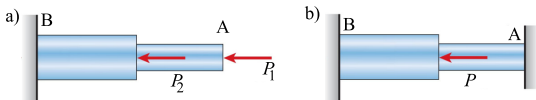
- 1 Definicja i przykłady czystego rozciągania
- 2 Zależności statyczne, geometryczne i fizyczne
- 3 Rozwiązanie zadań**
 - Rozwiązanie zadań statycznie wyznaczalnych
 - **Rozwiązanie zadań statycznie niewyznaczalnych**
- 4 Energia odkształcenia sprężystego
- 5 Jednoosiowy stan naprężeń

Rozwiązywanie zadań statycznie niewyznaczalnych

Z zagadnieniem **statycznie niewyznaczalnym** mamy do czynienia wtedy, gdy równań równowagi jest zbyt mało, aby można było wyznaczyć wszystkie niewiadome.

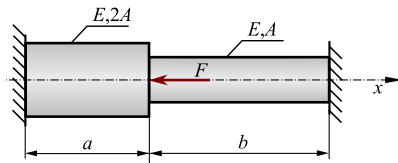
W celu rozwiązania zadania należy:

- zapisać równanie równowagi
- zapisać równanie zgodności (równanie geometryczne) pokazujące zgodność przemieszczeń z warunkami podparcia
- zapisać równanie siła-przemieszczenie, tzn. wyrazić równanie zgodności jako funkcję nieznanymi sił



Rozwiązanie zadań statycznie niewyznaczalnych

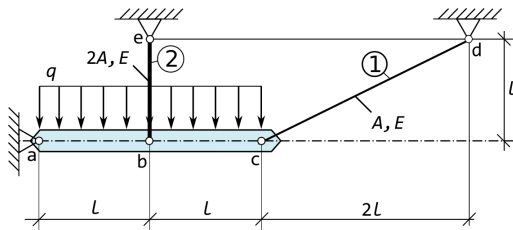
Wyznaczyć siły w przecie przedstawionym na rysunku.



Zadania statycznie niewyznaczalne

Przykład

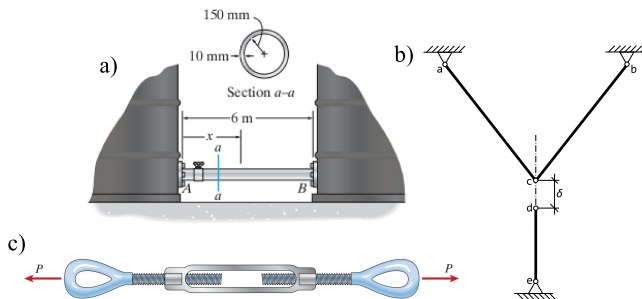
Pozioma sztywna belka podparta jest dwoma prętami i obciążona intensywnością siły q . Wyznaczyć przemieszczenie pionowe punktu b .



Inne źródła naprężeń i odkształceń

Naprężenia i odkształcenia w konstrukcji mogą pojawić się wskutek:

- zjawisk termicznych
- błędów montażowych
- wstępne napinanie konstrukcji (np. śruby)



Odształcenia i naprężenia termiczne

- odkształcenia termiczne są proporcjonalne do zmiany temperatury

$$\varepsilon_t = \alpha \Delta T$$

gdzie α – współczynnik rozszerzalności cieplnej [$1/^\circ\text{C}$]

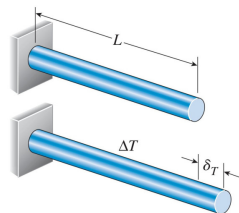
- zależność temperatura-odkształcenie

$$\Delta L_t = \varepsilon_t L = \alpha \Delta T L$$

- naprężenia termiczne

$$\sigma_t = E \varepsilon_t$$

Czy zawsze się pojawia?

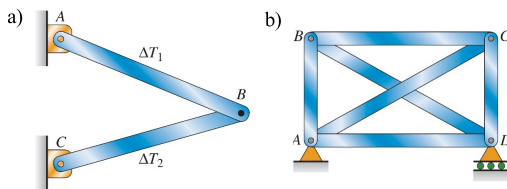


Odształcenia i naprężenia termiczne

- w przypadku konstrukcji statycznie niewyznaczalnych odkształcenia termiczne są blokowane, co wywołuje **naprężenia termiczne**

$$\sigma_t = \varepsilon_t E = \alpha \Delta T E$$

- podczas analizowania takich konstrukcji, oprócz równania siła-odkształcenie trzeba użyć równania temperatura-odkształcenie

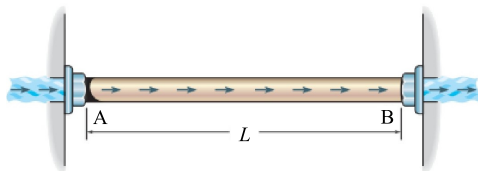


Odkształcenia i naprężenia termiczne

Przykład

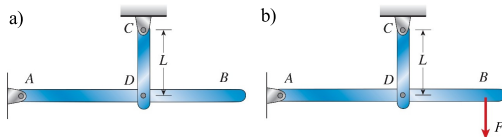
Rura o długości $L = 300$ mm wykonana z brązu ma średnicę wewnętrzną $d = 26$ mm i grubość ścianki $t = 6$ mm. Gaz rozgrzewa rurę do temperatury $T_2 = 90^\circ\text{C}$. Rura montowana była w temperaturze $T_2 = 15^\circ\text{C}$. Dla brązu: $\alpha = 18 \cdot 10^{-6}\text{K}^{-1}$, $E = 110000$ MPa.

Wyznaczyć reakcje w punktach mocowania rury oraz naprężenia w rurze wywołane zmianą temperatury przepływającego gazu.

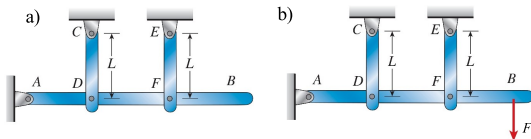


Odształcenia i naprężenia montażowe

- w przypadku konstrukcji statycznie wyznaczalnych błędy montażowe i niedokładności wykonania powodują jedynie zmianę geometrii konstrukcji



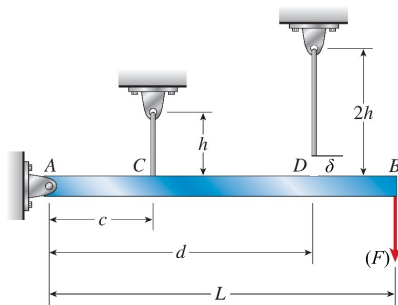
- w przypadku konstrukcji statycznie niewyznaczalnych błędy montażowe i niedokładności wykonania wywołują odkształcenia i naprężenia montażowe



Odkształcenia i naprężenia montażowe

Przykład

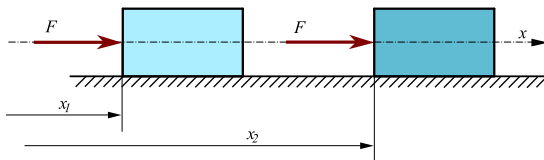
Sztywna belka o długości L jest podwieszona na dwóch prętach o długości h i $2h$. Wyznaczyć naprężenia montażowe w prętach uwzględniając wadliwe umiejscowienie podpory – δ . Jakie będą naprężenia w prętach po przyłożeniu siły F ?



Praca – energia

Praca

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F dx$$



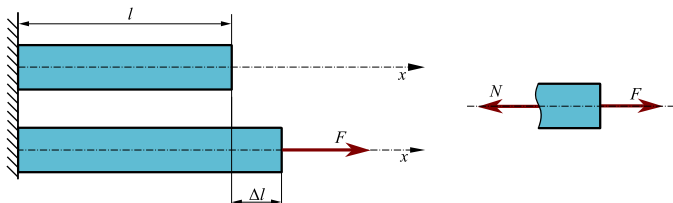
W przypadku, gdy droga jest linią prostą, a siła działa wzdłuż tej linii, mamy

$$W = Fs \quad [J]=[Nm]$$

Praca sił zewnętrznych

W czasie rozciągania pręta statyczną siłą F wydłuża się on o Δl . Pracę W sił zewnętrznych F , wywołujących obciążenie, można zapisać

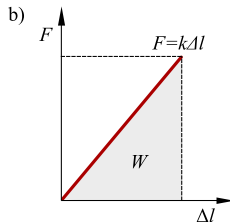
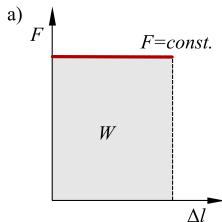
$$W = \int_0^{\Delta l} F d(\Delta l)$$



Praca sił zewnętrznych

- w zależności od charakteru siły, praca W może mieć różną wartość
- jeśli obciążenie jest funkcją stałą $F = \text{const.}$ (a), do pręta przyłożona jest od razu pełna wartość obciążenia, mamy

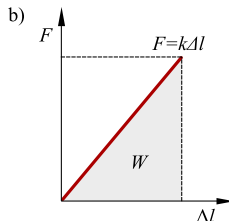
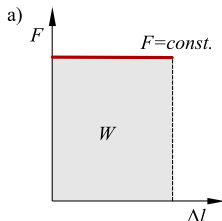
$$W = \int_0^{\Delta l} F d(\Delta l) = F \int_0^{\Delta l} d(\Delta l) = F \Delta l$$



Praca sił zewnętrznych

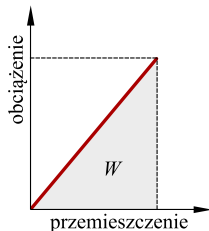
- jeśli obciążenie jest funkcją liniową $F = k\Delta l$ (b), gdzie k jest sztywnością pręta, co oznacza, że siła przykładana jest stopniowo od zera do wartości maksymalnej, mamy

$$W = \int_0^{\Delta l} F d(\Delta l) = \int_0^{\Delta l} k\Delta l d(\Delta l) = k \int_0^{\Delta l} \Delta l d(\Delta l) = \frac{1}{2} F \Delta l$$



Praca sił zewnętrznych

- w zagadnieniach wytrzymałości materiałów zakłada się, że obciążenie przykładane jest powoli od zera do wartości maksymalnej
- zatem pracę wykonaną przez siłę zewnętrzną wyznacza się jako pole trójkąta utworzonego przez prostą opisującą zależność przemieszczenia od obciążenia
- jest to prawdziwe dla wszystkich prostych przypadków obciążeń
 - rozciąganie
(siła-wydłużenie)
 - skręcanie
(moment skręcający-kąt skręcenia)
 - zginanie
(moment gnący-kąt obrotu belki)



Energia odkształcenia sprężystego

- praca sił zewnętrznych W obciążających konstrukcję, zamienia się w pełni w **energię odkształcenia sprężystego** U

$$U = W$$

Energia odkształcenia sprężystego

energia zaabsorbowana przez pręt w czasie procesu obciążania

- jest to prawdą gdy:
 - odkształcenie jest sprężyste
 - materiał odkształca się zgodnie z prawem Hooke'a
 - nie ma strat energii

Energia odkształcenia sprężystego

Dla przypadku rozciąganego pręta o stałej średnicy mamy:

$$U = \frac{1}{2}N\Delta l$$

Wiemy, że:

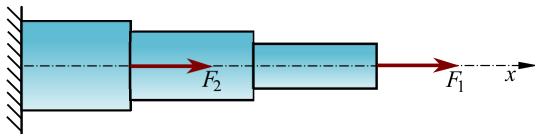
$$\Delta l = \frac{Nl}{EA} \quad \text{lub} \quad N = \frac{\Delta l EA}{l}$$

Zatem ostatecznie:

$$U = \frac{N^2 l}{2EA} \quad \text{lub} \quad U = \frac{(\Delta l)^2 EA}{2l}$$

Energia odkształcenia nie jest liniową funkcją obciążenia

Energia odkształcenia prętów niepryzmatycznych

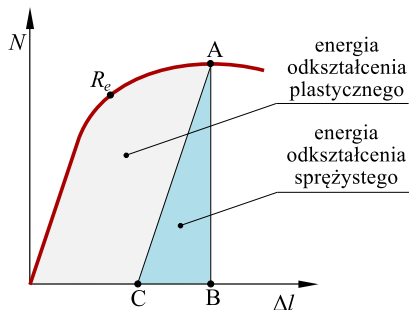


Energia odkształcenia sprężystego, dla przypadku pręta złożonego z wielu segmentów, jest sumą energii zgromadzoną w poszczególnych segmentach, liczoną przy obciążeniu wszystkimi siłami

$$U = \sum_{i=1}^n U_i = \sum_{i=1}^n \frac{N_i^2 l_i}{2E_i A_i}$$

Energia odkształcenia

- pole pod krzywą rozciągania opisuje wartość energii zużytej w czasie próby
- można wyróżnić energię odkształcenia sprężystego i plastycznego



Gęstość energii odkształcenia u

Gęstość energii odkształcenia

energia odkształcenia odniesiona do objętości elementu konstrukcyjnego

$$u = \frac{U}{V}$$

Dla pryzmatycznego pręta rozciąganego mamy:

$$u = \frac{U}{V} = \frac{N^2}{2EA^2} = \frac{\sigma^2}{2E}$$

Zdolność pochłaniania energii u_r

Przyjmując naprężenia σ równe granicy plastyczności R_e można określić ilość energii jaka zostanie zmagazynowana w elemencie bez trwałego odkształcenia.

$$u_r = \frac{R_e^2}{2E}$$

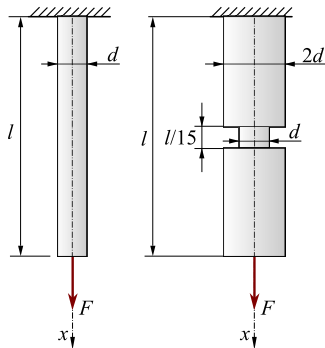
Przykład:

- stal: $R_e = 250 \text{ MPa}$, $E = 200000 \text{ MPa} \rightarrow u_r = 0,156 \text{ MPa}$
- guma: $R_e = 2 \text{ MPa}$, $E = 2 \text{ MPa} \rightarrow u_r = 1 \text{ MPa}$

Energia odkształcenia sprężystego

Przykład

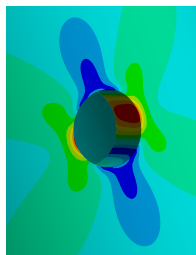
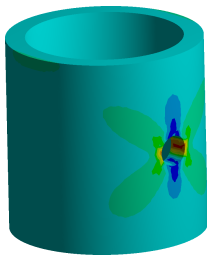
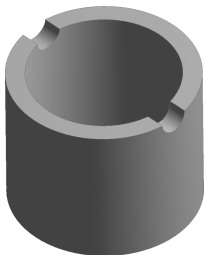
Porównać ilość zgromadzonej energii sprężystej w prętach przedstawionych na rysunku. Założyć liniowo-sprężyste zachowanie materiału.



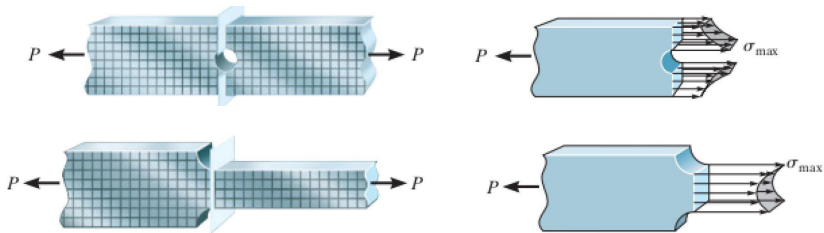
Efektywny przekrój poprzeczny

Rzeczywiste elementy konstrukcyjne zawierają otwory i podcięcia niezbędne do montażu. Powoduje to:

- zmniejszenie przekroju poprzecznego przenoszącego obciążenie
- powstawanie śpiętrzeń naprężeń wokół otworów i podcięć

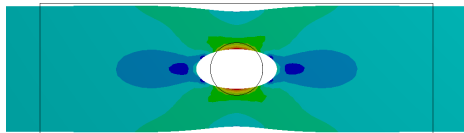


Spiętrzenia naprężeń



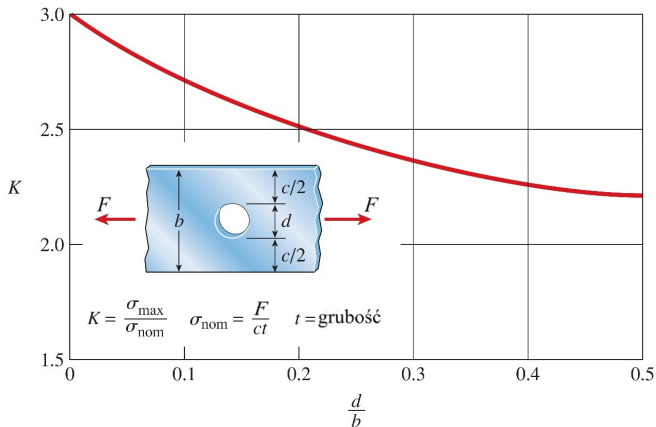
Współczynnik spiętrzenia naprężeń:

$$K = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{nom}}$$



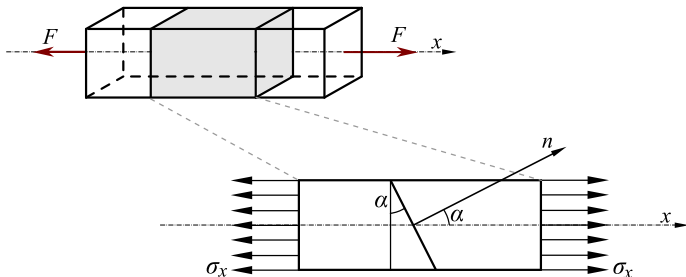
Spiętrzenia naprężeń

Wykres pozwalający wyznaczyć współczynnik spiętrzenia naprężeń



Naprężenia na powierzchni pochylonej

- zbadajmy rozkład i wartość naprężeń na powierzchni pochylonej, dla której kierunek normalny n odchylony jest od osi o kąt α
- zgodnie z zasadą de'Saint Venanta, powierzchnia ta jest oddalona od punktu przyłożenia siły



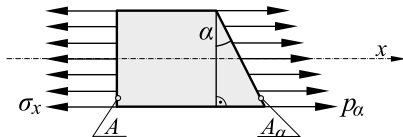
Naprężenia na powierzchni pochylonej

- rozpatrzmy lewą część pręta; na przekroju poprzecznym o polu powierzchni A działają naprężenia σ_x
- przekrój nachylonym pod kątem α ma pole powierzchni równe A_α ; naprężenia na nim działające oznaczmy jako p_α
- zapiszmy równanie równowagi sumy rzutów sił na oś x

$$-\sigma_x A + p_\alpha A_\alpha = 0$$

- z rysunku widać, że

$$A_\alpha = \frac{A}{\cos \alpha}$$



Naprężenia na powierzchni pochylonej

- mając powyższe na uwadze, z równania równowagi otrzymamy

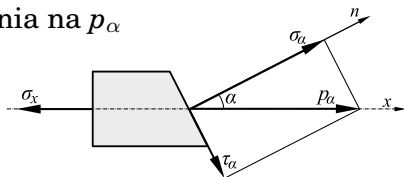
$$p_{\alpha} = \sigma_x \cos \alpha$$

- zgodnie z rysunkiem, naprężenie p_{α} możemy rozłożyć na dwie składowe: normalną σ_{α} i styczną τ_{α} , który wartość będzie równa

$$\begin{cases} \sigma_{\alpha} = p_{\alpha} \cos \alpha \\ \tau_{\alpha} = p_{\alpha} \sin \alpha \end{cases}$$

- a po podstawieniu wyrażenia na p_{α}

$$\begin{cases} \sigma_{\alpha} = \sigma_x \cos^2 \alpha \\ \tau_{\alpha} = 0,5 \sigma_x \sin 2\alpha \end{cases}$$

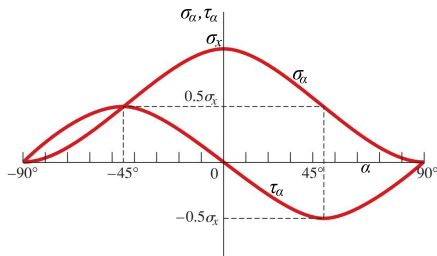


Naprężenia na powierzchni pochylonej

Wyniki analizy naprężeń na powierzchni pochylonej pozwalają stwierdzić, że:

- na przekrojach równoległych do przekroju poprzecznego, $\alpha = 0$, naprężenia normalne mają wartość największą $\sigma_\alpha = \sigma_x$, natomiast naprężenia styczne są równe zero $\tau_\alpha = 0$

$$\begin{cases} \sigma_\alpha = \sigma_x \cos^2 \alpha \\ \tau_\alpha = 0,5 \sigma_x \sin 2\alpha \end{cases}$$

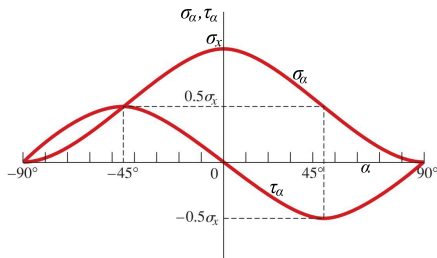


Naprężenia na powierzchni pochylonej

Wyniki analizy naprężeń na powierzchni pochylonej pozwalają stwierdzić, że:

- na przekrojach nachylonych pod kątem $\alpha = 45^\circ$ do przekroju poprzecznego naprężenia styczne mają wartość największą i równą naprężeniom normalnym $\tau_\alpha = \sigma_\alpha = 0,5\sigma_x$

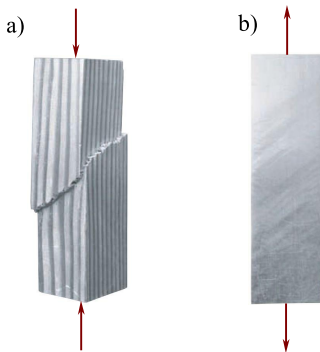
$$\begin{cases} \sigma_\alpha = \sigma_x \cos^2 \alpha \\ \tau_\alpha = 0,5\sigma_x \sin 2\alpha \end{cases}$$



Naprężenia na powierzchni pochyłonej

Efekt działania maksymalnych naprężeń stycznych można zaobserwować:

- przy zniszczeniu próbek z materiału kruchego poddanych ścisnaniu (a)
- przy rozciąganiu próbek z materiału plastycznego (linie Luders'a) (b)



Naprężenia na powierzchni pochylonej

Przykład [Gere, Goodno (2009)]

Dwie deski połączone są klejem. Naprężenia normalne w deskach wywołane siłą F to 4,9 MPa. Z powodów technologicznych kąt α musi zawierać się w przedziale $10\text{-}40^\circ$. Jeżeli styczne naprężenia dopuszczalne są równe 2,25 MPa, jaki jest największy dopuszczalny kąt α ?

