

Mechanika i wytrzymałość materiałów

Wstęp

dr hab. inż. Paweł JASION

e-mail: `pawel.jasion@put.poznan.pl`

www: `pawel.jasion.pracownik.put.poznan.pl`

Politechnika Poznańska
Instytut Mechaniki Stosowanej
Zakład Wytrzymałości Materiałów i Konstrukcji

Informacje organizacyjne

Konsultacje

- poniedziałek, 11:30-12:15; czwartek 09:30-10:15
- pokój: MC404 (kampus Piotrowo)

Organizacja przedmiotu

- wykład: 30 godzin
- ćwiczenia: 30 godzin
- laboratorium: 15 godzin

Zaliczenie przedmiotu

- wykład: dwa kolokwia
- ćwiczenia: dwa kolokwia
- laboratorium: wejściówki i raporty

Zakres przedmiotu

- mechanika techniczna
- zachowanie się materiału pod obciążeniem
- zasady projektowania konstrukcji
- rozciągania i ściskanie prętów i układów prętowych
- ścinanie techniczne
- skręcania – projektowanie wałów
- zginanie – projektowanie belek
- stateczność prętów
- wytrzymałość zmęczeniowa

- ❶ Dyląg Z., Jakubowicz A., Orłoś Z. *Wytrzymałość materiałów. Tom I*, WNT, Warszawa, 2013
- ❷ Gere JM., Goodno BJ. *Mechanics of materials*, Cengage Learning, Australia, 2009
- ❸ Ostwald M. *Podstawy wytrzymałości materiałów i konstrukcji*, WPP, Poznań, 2017
- ❹ Ostwald M. *Wytrzymałość materiałów i konstrukcji – zbiór zadań*, WPP, Poznań, 2018
- ❺ Hibbeler RC. *Statics and Mechanics of materials (5th ed.)*, Pearson, Boston, 2016
- ❻ Siuta W. *Mechanika techniczna*, WSiP, Warszawa, 1999
- ❼ Joniak S. (red.) *Badania eksperymentalne w wytrzymałości materiałów*, WPP, Poznań, 2006.

- 1 Informacje wprowadzające
 - Czym jest wytrzymałość materiałów?
 - Wytrzymałość materiałów w procesie projektowym
 - Jakiej wiedzy potrzebujemy?
- 2 Podstawowa wiedza z mechaniki
 - Zasady i pojęcia
 - Skalary i wektory
 - Moment siły
- 3 Równowaga ciała sztywnego
 - Warunki równowagi
 - Przykłady

Contents

- 1 Informacje wprowadzające
 - Czym jest wytrzymałość materiałów?
 - Wytrzymałość materiałów w procesie projektowym
 - Jakiej wiedzy potrzebujemy?
- 2 Podstawowa wiedza z mechaniki
 - Zasady i pojęcia
 - Skalary i wektory
 - Moment siły
- 3 Równowaga ciała sztywnego
 - Warunki równowagi
 - Przykłady

Tytuł przedmiotu

Tradycyjny tytuł przedmiotu:

- wytrzymałość materiałów,

co sugeruje:

- zajmowanie się analizą obciążeń prowadzących do zniszczenia materiału.

Tytuł oddający istotę przedmiotu:

- statyka odkształcalnych ciał sprężystych

Interesuje nas zatem:

badanie zachowania się konstrukcji poddanej obciążeniom, które to zachowanie zależy między innymi od materiału

Tytuł przedmiotu

Pochodzenie tytułu:

- z języka francuskiego (XIX wiek):
résistance de matériaux

Tytuł w wersji angielskiej:

- *Strength of materials* lub *Mechanics of materials*



Siméon Poisson



Adhémar Jean Claude Barré
de Saint-Venant



Claude-Louis Navier

Historia przedmiotu

Więcej informacji o powstawaniu i rozwoju wytrzymałości materiałów można znaleźć w:



Timoshenko, S.P.

History of Strength of Materials

Dover Publications, Inc., New York, 1983



Kurrer, K.E.

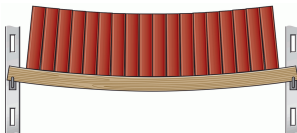
The History of the Theory of Structures

Ernst & Sohn, Berlin, 2008

Do czego przydaje się wytrzymałość materiałów?

Problem

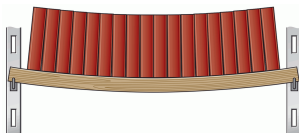
Moja półka ugina się zbyt mocno. Co zrobić, żeby zmniejszyć ugięcie? Jeśli będę znał czynniki wpływające na ugięcie będę wiedział co mogę zrobić.



Do czego przydaje się wytrzymałość materiałów?

Problem

Moja półka ugina się zbyt mocno. Co zrobić, żeby zmniejszyć ugięcie? Jeśli będę znał czynniki wpływające na ugięcie będę wiedział co mogę zrobić.



Rozwiązanie: model matematyczny

$$v = \frac{5qL^4}{384EI}$$

Do czego przydaje się wytrzymałość materiałów?

Wytrzymałość materiałów pozwala:

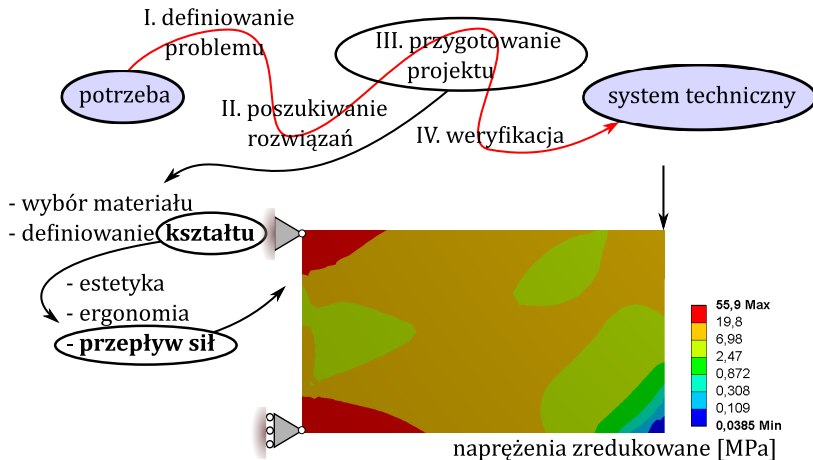
- projektować trwałe i efektywne konstrukcje w oparciu o modele matematyczne
- wyznaczać naprężenia i przemieszczenia w celu ulepszania istniejących konstrukcji
- rozumieć zachowanie się “konstrukcji” naturalnych



Contents

- 1 Informacje wprowadzające
 - Czym jest wytrzymałość materiałów?
 - Wytrzymałość materiałów w procesie projektowym
 - Jakiej wiedzy potrzebujemy?
- 2 Podstawowa wiedza z mechaniki
 - Zasady i pojęcia
 - Skalary i wektory
 - Moment siły
- 3 Równowaga ciała sztywnego
 - Warunki równowagi
 - Przykłady

Wytrzymałość materiałów w procesie projektowym



Kształtowanie elementów konstrukcyjnych

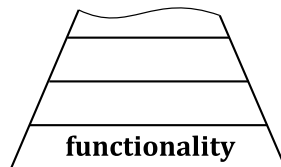
Funkcjonalność

zdolność konstrukcji do spełniania swojej funkcji

Aby konstrukcja mogła spełniać swoją funkcję nie może:

- utracić spójności – *warunek wytrzymałości*

$$\sigma \leq \sigma_{dop}$$



Kształtowanie elementów konstrukcyjnych

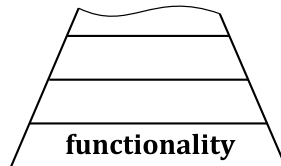
Funkcjonalność

zdolność konstrukcji do spełniania swojej funkcji

Aby konstrukcja mogła spełniać swoją funkcję nie może:

- ulegać nadmiernej deformacji lub zmianie wymiarów –
warunek sztywności

$$\delta \leq \delta_{dop}$$



Kształtowanie elementów konstrukcyjnych

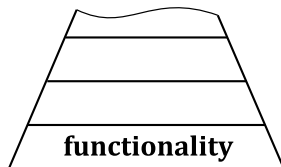
Funkcjonalność

zdolność konstrukcji do spełniania swojej funkcji

Aby konstrukcja mogła spełniać swoją funkcję nie może:

- utracić stateczności – *warunek stateczności*

$$F \leq F_{cr}$$



Kształtowanie elementów konstrukcyjnych

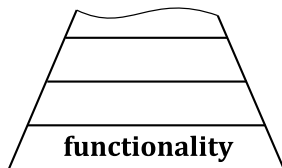
Funkcjonalność

zdolność konstrukcji do spełniania swojej funkcji

Aby konstrukcja mogła spełniać swoją funkcję nie może:

- utracić spójności – *warunek wytrzymałości*
- ulegać nadmiernej deformacji lub zmianie wymiarów – *warunek sztywności*
- utracić stateczności – *warunek stateczności*

$$\left. \begin{array}{l} \sigma \leq \sigma_{dop} \\ \delta \leq \delta_{dop} \\ F \leq F_{cr} \end{array} \right\} = \text{funkcjonalność}$$

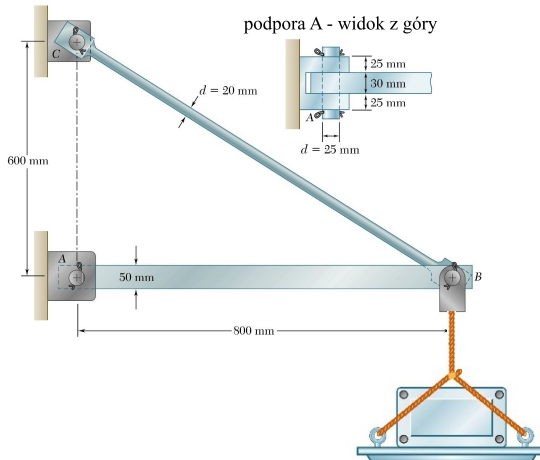


Contents

- 1 Informacje wprowadzające
 - Czym jest wytrzymałość materiałów?
 - Wytrzymałość materiałów w procesie projektowym
 - Jakiej wiedzy potrzebujemy?
- 2 Podstawowa wiedza z mechaniki
 - Zasady i pojęcia
 - Skalary i wektory
 - Moment siły
- 3 Równowaga ciała sztywnego
 - Warunki równowagi
 - Przykłady

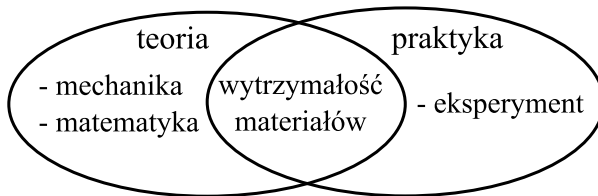
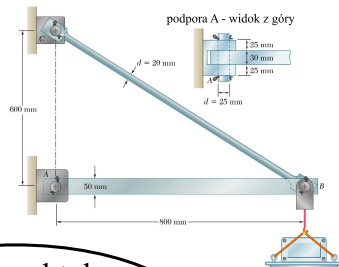
Jakiej wiedzy potrzebujemy?

[Beer F.P. et al. 2012]



Jakiej wiedzy potrzebujemy?

[Beer F.P. et al. 2012]



Contents

- 1 Informacje wprowadzające
 - Czym jest wytrzymałość materiałów?
 - Wytrzymałość materiałów w procesie projektowym
 - Jakiej wiedzy potrzebujemy?
- 2 Podstawowa wiedza z mechaniki
 - Zasady i pojęcia
 - Skalary i wektory
 - Moment siły
- 3 Równowaga ciała sztywnego
 - Warunki równowagi
 - Przykłady

Czym jest mechanika?

Mechanika

dział fizyki opisujący stan spoczynku lub ruch ciał, będących pod działaniem sił

Statyka

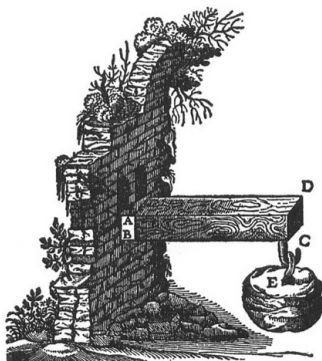
zajmuje się równowagą ciał; używana jest do określania sił działających na ciało bądź w ciele, które sprawiają, że ciało jest albo w równowadze albo porusza się ruchem jednostajnym

Wytrzymałość materiałów

pozwała określić zależności między obciążeniem zewnętrznym a intensywnością sił wewnętrznych działających w ciele

Historia

- starożytność: Archimedes
 - eksperymenty z oddziaływaniem sił
- wiek XVII: Galileusz
 - wpływ działania sił na belkę
- wiek XVIII: Saint-Venant, Poisson, Lamé, Navier
 - modele matematyczne



Podstawowe wielkości i idealizacja

Wielkości

- **długość** – określa położenie punktu (metr [m])
- **czas** – określa kolejność zdarzeń (sekunda [s])
- **masa** – mierzy ilość materii (kilogram [kg])
- **siła** – oddziaływanie na ciało, które powoduje jego ruch (Newton [N])

Powyższe wielkości są ze sobą powiązane drugą zasadą dynamiki Newtona. Można z niej wyprowadzić jednostkę siły [N].

$$N = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2}$$

Podstawowe wielkości i idealizacja

Idealizacje

- **punkt materialny** – posiada masę, ale jego rozmiar jest zanedbywalnie mały
- **ciało sztywne** – zbiór dużej liczby punktów materialnych, pozostających w niezmienniczej odległości od siebie nawzajem zarówno przed, jak i po obciążeniu
- **siła skupiona** – efekt obciążenia, które działa na punkt ciała

Uwagi techniczne

Spójność jednostek

$$d = \sqrt[3]{\frac{32M_z}{\pi\sigma_{dop}}} = \sqrt[3]{\frac{[\text{Nmm}]}{[\text{MPa}]}} = \sqrt[3]{\frac{[\text{Nmm}]}{\frac{[\text{N}]}{[\text{mm}^2]}}} = [\text{mm}]$$

Cyfry znaczące

24500 – 5 cyfr znaczących ($24,5 \times 10^3$)

0,00325 – 3 cyfry znaczące ($3,25 \times 10^{-3}$)

Zaokrąglanie liczb

0,3476 $\approx$ 0,348

0,3473 $\approx$ 0,347

Contents

- 1 Informacje wprowadzające
 - Czym jest wytrzymałość materiałów?
 - Wytrzymałość materiałów w procesie projektowym
 - Jakiej wiedzy potrzebujemy?
- 2 Podstawowa wiedza z mechaniki
 - Zasady i pojęcia
 - **Skalary i wektory**
 - Moment siły
- 3 Równowaga ciała sztywnego
 - Warunki równowagi
 - Przykłady

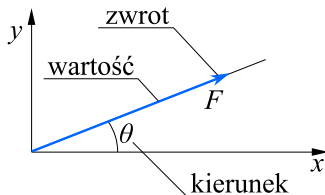
Definicje

Skalar

każda dodatnia lub ujemna wielkość fizyczna, która może być w pełni określona przez swoją wartość (długość, masa, czas)

Wektor

każda wielkość fizyczna, której pełne określenie wymaga podania wartości, kierunku i zwrotu (siła, moment)

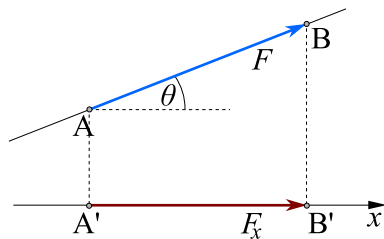


Płaski układ sił

Rzut siły na oś

Rzutem siły na dowolną oś nazywamy odcinek A'B', łączący rzut początku i końca danej siły na tę oś.

$$F_x = F \cos \theta$$



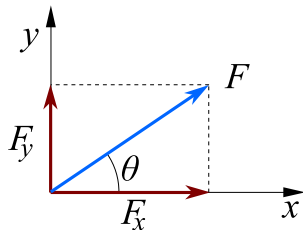
Płaski układ sił

Składowe prostokątne

Jeśli siłę rozłoży się na dwie składowe zgodne z osiami x and y , składowe te nazywamy **składowymi prostokątnymi**.

$$F_x = F \cos \theta$$

$$F_y = F \sin \theta$$



Płaski układ sił

Wypadkowa płaskiego układu sił

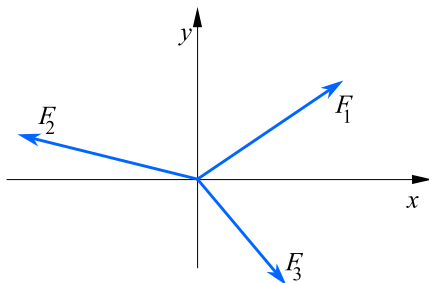
$$F_{Rx} = F_{1x} - F_{2x} + F_{3x}$$

$$F_{Ry} = F_{1y} + F_{2y} - F_{3y}$$

$$F_{Rx} = \sum_{i=1}^n F_{ix}$$

$$F_{Ry} = \sum_{i=1}^n F_{iy}$$

$$F_R = \sqrt{F_{Rx}^2 + F_{Ry}^2}$$



- pojedyncza siła wypadkowa oddziałuje na ciało tak samo jak wszystkie siły układu

Płaski układ sił

Przykłady [Hibbeler, 2014]

Wyznaczyć składowe prostokątne oraz wartości i kierunki sił wypadkowych działających na śrubę oczkową przedstawioną na poniższych rysunkach

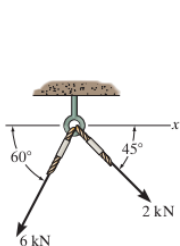


Fig. 1

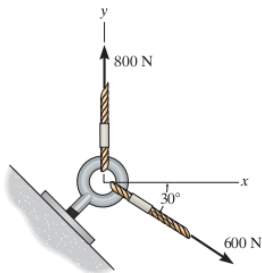


Fig. 2

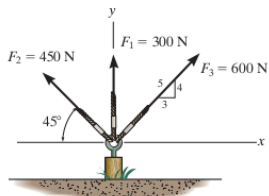


Fig. 3

Contents

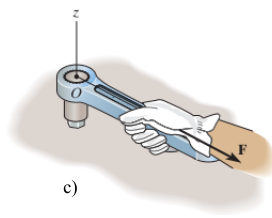
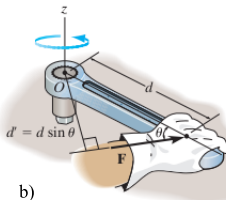
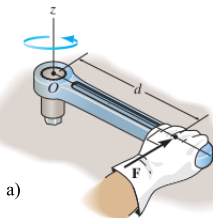
- 1 Informacje wprowadzające
 - Czym jest wytrzymałość materiałów?
 - Wytrzymałość materiałów w procesie projektowym
 - Jakiej wiedzy potrzebujemy?
- 2 Podstawowa wiedza z mechaniki
 - Zasady i pojęcia
 - Skalary i wektory
 - **Moment siły**
- 3 Równowaga ciała sztywnego
 - Warunki równowagi
 - Przykłady

Moment siły

Wartość momentu M_0

$$M_0 = Fd$$

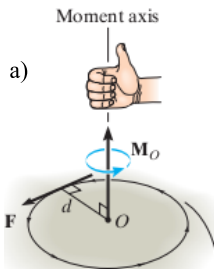
gdzie d jest **ramieniem momentu** lub **najkrótszą odległością** od osi w punkcie 0 do linii działania siły



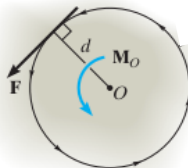
Moment siły

Kierunek momentu M_0

jest definiowany przez **oś momentu**, która jest prostopadła do płaszczyzny zawierającej siłę F i ramię momentu d .



b)

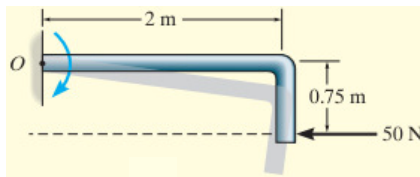


Moment siły

Przykład [Hibbeler, 2014]

Wyznaczyć:

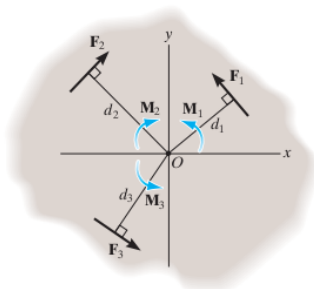
- moment M_0 działający na punkt 0.



Moment siły

Moment wypadkowy

$$M_{R0} = F_1 d_1 - F_2 d_2 + F_3 d_3 \quad M_{R0} = \sum_{i=1}^n F_i d_i$$

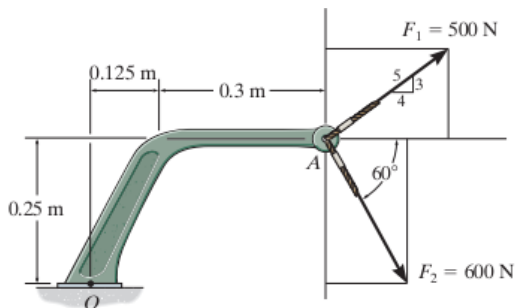


Moment siły

Przykład [Hibbeler, 2014]

Wyznaczyć:

- moment wypadkowy działający w punkcie O , wywołany siłami F_1 i F_2 .

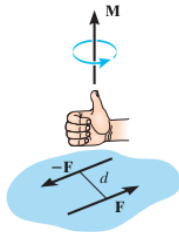
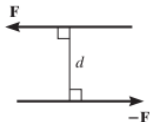


Moment siły

Moment pary sił

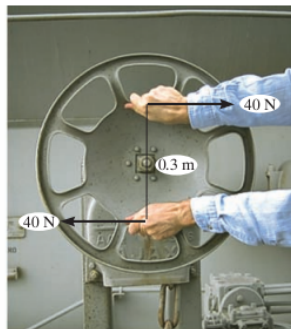
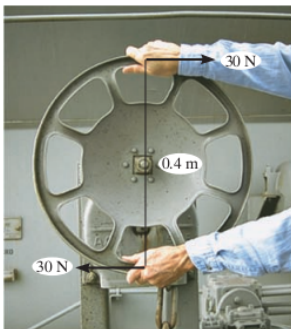
Parę sił definiuje się jako dwie równoległe siły, które mają tę samą wartość ale przeciwne zwroty i są oddalone od siebie o dystans d zwany ramieniem pary. Ponieważ wypadkowa sił jest równa zero, jedynym efektem ich działania jest obrót.

$$M = Fd$$



Moment siły

Pary równoważne

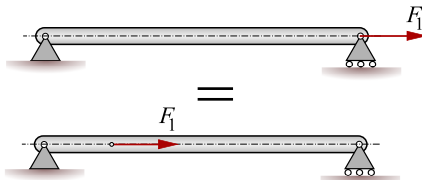


Uproszczenia układów sił i momentów

- czasami wygodnie jest zredukować układ sił i momentów działających na ciało do prostszego, równoważnego układu sił składającego się z jednej siły i jednego momentu
- układ sił nazywamy równoważnym, jeśli efekt jego działania jest taki sam jak efekt działania układu wyjściowego

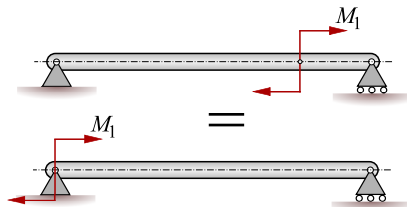
Uproszczenia układów sił i momentów

- siła przyłożona do ciała sztywnego może być przesuwana wzdłuż swojej linii działania



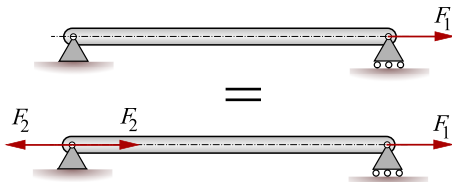
Uproszczenia układów sił i momentów

- moment przyłożony do ciała sztywnego może być przesuwany w płaszczyźnie swojego działania



Uproszczenia układów sił i momentów

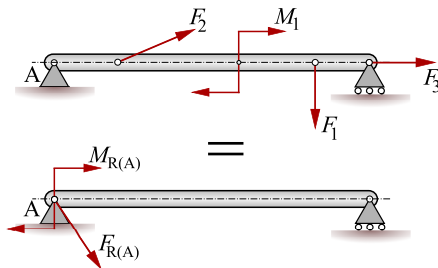
- dwie siły o takiej samej wartości i kierunku, ale o przeciwnych zwrotach dodane do ciała sztywnego nie zmieniają jego zachowania



$$F_1 = -F_2 + F_2 + F_1$$

Uproszczenia układów sił i momentów

- każdy układ sił i momentów może zostać zredukowany do siły wypadkowej i momentu wypadkowego działających w dowolnym punkcie



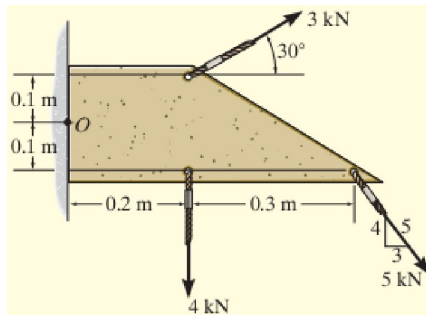
$$F_{R(A)} = \sum F_i$$

$$M_{R(A)} = \sum M_A + \sum M$$

Uproszczenia układów sił i momentów

Przykład [Hibbeler, 2014]

Zastąpić siły i momenty działające na belkę przedstawioną na rysunku, siłą i momentem wypadkowym działającymi w punkcie O.



Contents

- 1 Informacje wprowadzające
 - Czym jest wytrzymałość materiałów?
 - Wytrzymałość materiałów w procesie projektowym
 - Jakiej wiedzy potrzebujemy?
- 2 Podstawowa wiedza z mechaniki
 - Zasady i pojęcia
 - Skalary i wektory
 - Moment siły
- 3 Równowaga ciała sztywnego
 - Warunki równowagi
 - Przykłady

Warunki równowagi ciała sztywnego

Ciało znajduje się w równowadze, jeżeli:

- siła wypadkowa i moment wypadkowy są równe zero
 - równania równowagi (płaski układ sił – dwa wymiary)

$$\sum F_x = 0; \quad \sum F_y = 0; \quad \sum M_0 = 0$$

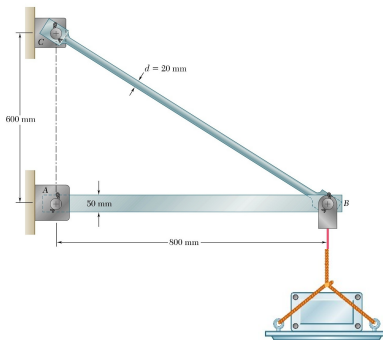
lub

$$\sum F_x = 0; \quad \sum M_A = 0; \quad \sum M_B = 0$$

- rozważane ciało jest ciałem sztywnym – nie deformuje się po obciążeniu
- kierunki działania sił i ramiona momentów nie zmieniają się

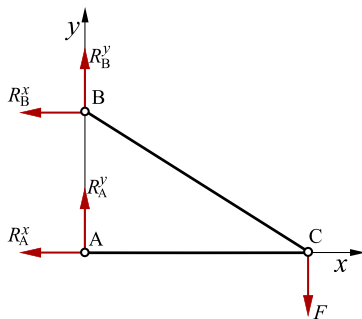
Uwalnianie układu od więzów (ang. *free-body diagram*)

- zanim zapisze się równania równowagi wszystkie siły i momenty, znane i nieznane, działające na ciało muszą zostać określone



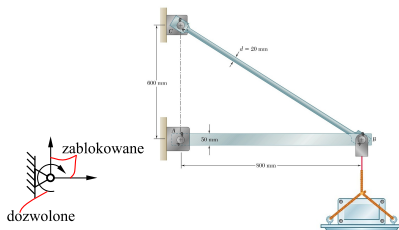
Uwalnianie układu od więzów (ang. *free-body diagram*)

- aby określić jakie siły działają na układ, należy uwolnić ten układ od więzów
- układ uwolniony od więzów to ciało odizolowane od jego otoczenia



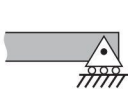
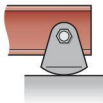
Uwalnianie układu od więzów (ang. *free-body diagram*)

- reakcje – siły, które pojawiają się w podporach i punktach kontaktu między ciałami
 - jeśli podpora odbiera możliwość ruchu ciała w danym kierunku, to pojawia się reakcja działająca w tym właśnie kierunku
 - jeśli podpora blokuje obrót, pojawia się w tym punkcie moment działający na ciało

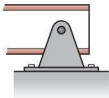


Typy podpór

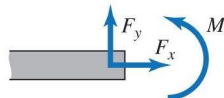
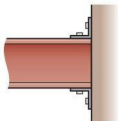
podpora przegubowa przesuwna



podpora przegubowa nieprzesuwna



utwierdzenie

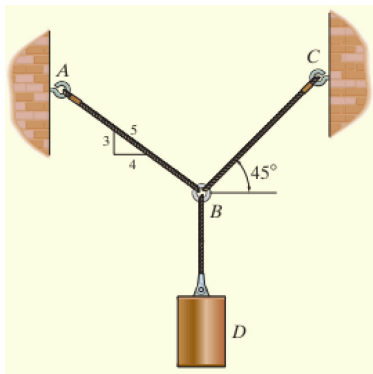


Contents

- 1 Informacje wprowadzające
 - Czym jest wytrzymałość materiałów?
 - Wytrzymałość materiałów w procesie projektowym
 - Jakiej wiedzy potrzebujemy?
- 2 Podstawowa wiedza z mechaniki
 - Zasady i pojęcia
 - Skalary i wektory
 - Moment siły
- 3 Równowaga ciała sztywnego
 - Warunki równowagi
 - Przykłady

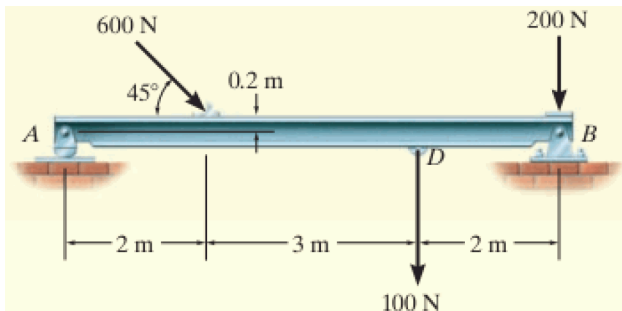
Przykład 1 [Hibbeler, 2014]

Wyznaczyć siły rozciągające w prętach BA i BC pozwalające utrzymać walec D o masie 60 kilogramów.



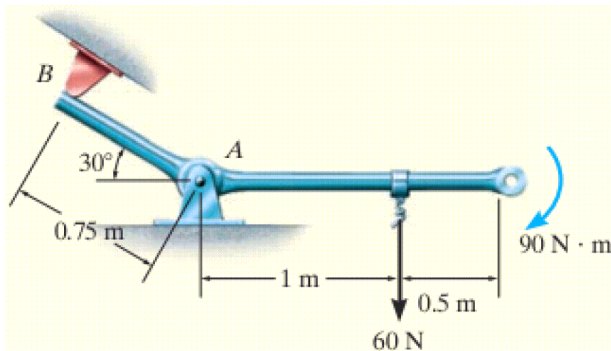
Przykład 2 [Hibbeler, 2014]

Wyznaczyć poziome i pionowe składowe reakcji wywołane podparą przegubową nieprzesuwną B i przegubową przesuwną A. Pominąć masę belki.



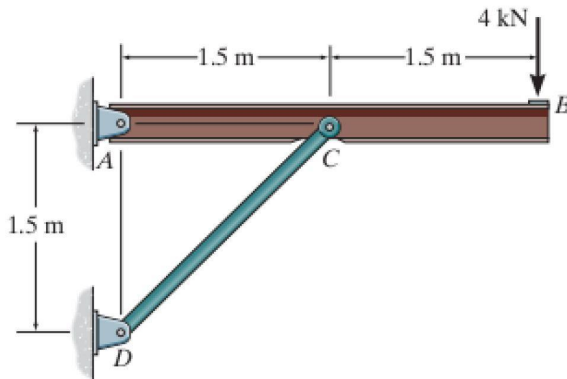
Przykład 3 [Hibbeler, 2014]

Dźwignia podparta jest przegubowo w punkcie A i opiera się swobodnie na gładkiej podporze B. Wyznaczyć poziomą i pionową reakcję w punkcie A.



Przykład 4 [Hibbeler, 2014]

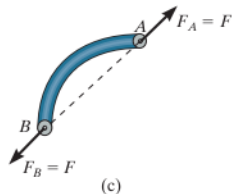
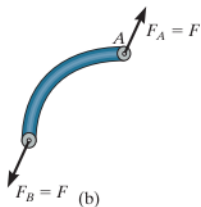
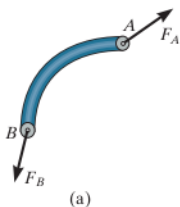
Wyznaczyć poziomą i pionową składową reakcji w punkcie A oraz reakcję działającą na belkę w punkcie C.



Układy z dwiema i trzema siłami

Element obciążony dwiema siłami

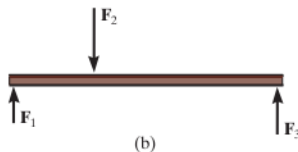
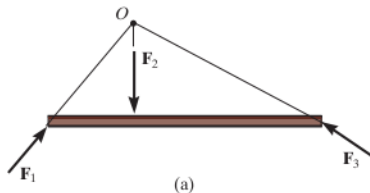
Dowolny element obciążony dwiema siłami pozostaje w równowadze, jeżeli siły te mają taką samą wartość, działają przeciwnych kierunkach i wzdłuż tego samego kierunku, wyznaczonego przez linię łączącą punkty przyłożenia sił.



Układy z dwiema i trzema siłami

Element obciążony trzema siłami

Równowaga momentów sił może być spełniona tylko, jeśli trzy siły tworzą zbieżny lub równoległy układ sił.



Układy z dwiema i trzema siłami

Example [Hibbeler, 2014]

Dźwignia ABC podparta jest przegubowo nieprzesuwnie w punkcie A i połączona z elementem BD . Zakładają, że masa elementów jest zanedbywalnie mała, wyznaczyć siły w podporze A .

