

Wytrzymałość Materiałów II

Wytrzymałość w zakresie sprężysto-plastycznym

opracował:

dr hab. inż. Paweł JASION

e-mail: `pawel.jasion@put.poznan.pl`

www: `pawel.jasion.pracownik.put.poznan.pl`

Politechnika Poznańska
Instytut Mechaniki Stosowanej
Zakład Wytrzymałości Materiałów i Konstrukcji

- 1 Podstawowe pojęcia
 - Założenia
 - Materiał sprężysto-plastyczny

- 2 Proste przypadki obciążenia
 - Pręty i układy prętowe
 - Skręcanie
 - Zginanie

Plan wykładu

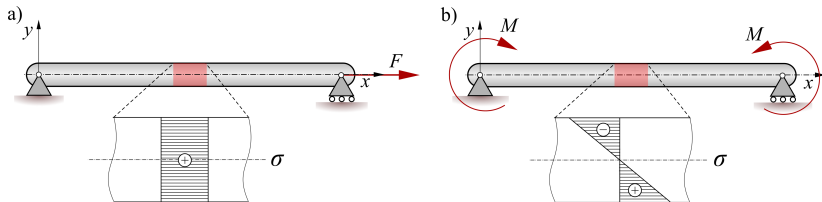
- 1 Podstawowe pojęcia
 - Założenia
 - Materiał sprężysto-plastyczny
- 2 Proste przypadki obciążenia
 - Pręty i układy prętowe
 - Skręcanie
 - Zginanie

Wytrzymałość a zniszczenie

- konstrukcja traci wytrzymałość, jeśli z powodu częściowego lub całkowitego zniszczenia lub odkształcenia przestaje spełniać swoją funkcję
- w tym sensie, wytrzymałość jest własnością konstrukcji
- jednak kryterium wytrzymałości związane jest ze stanem naprężeń w punkcie konstrukcji i dlatego opisuje lokalne własności zarówno stanu naprężeń jak i materiału
- oznacza to, że zniszczenie materiału nie musi być jednoznaczne ze zniszczeniem konstrukcji

Wytrzymałość a zniszczenie

- w przypadku pręta rozciąganego (a) rozkład naprężeń sprawia, że gdy osiągną one granicę plastyczności, pręt uplastycznia się na całym przekroju i ulega zniszczeniu
- w przypadku belki zginanej (b) uplastycznienie przekroju następuje stopniowo, od włókien zewnętrznych w głąb materiału; uplastycznienie zewnętrznych włókien nie musi oznaczać zniszczenia belki



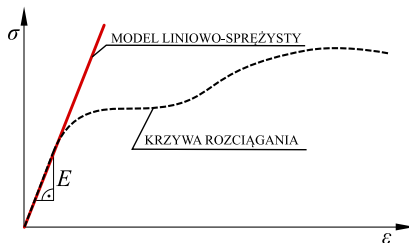
Plan wykładu

- 1 Podstawowe pojęcia
 - Założenia
 - **Materiał sprężysto-plastyczny**

- 2 Proste przypadki obciążenia
 - Pręty i układy prętowe
 - Skręcanie
 - Zginanie

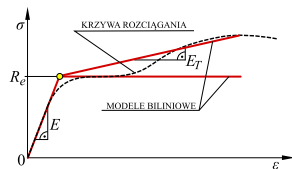
Modelowanie materiału

- przy analizowaniu konstrukcji w zakresie sprężystym, przyjmuje się liniowo-sprężysty model materiału
- model taki opisany jest dwoma parametrami: modułem Younga E i współczynnikiem Poissona ν
- materiał zachowuje się w sposób liniowy niezależnie od wartości naprężeń



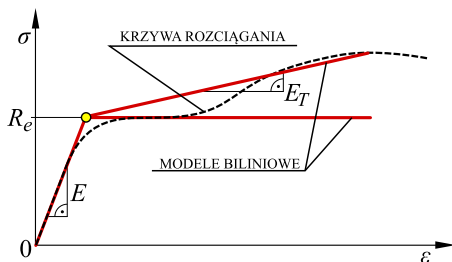
Modelowanie materiału

- w przypadku analizy konstrukcji z uwzględnieniem jej uplastycznienia należy przyjąć model materiału uwzględniający jego zachowanie się po przekroczeniu granicy plastyczności
- najprostszym modelem jest model biliniowy; wyróżnia się model
 - sprężysto-idealnie plastyczny
 - sprężysto-plastyczny z umocnieniem



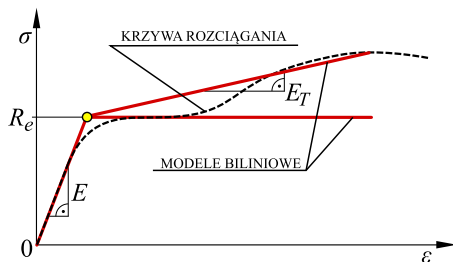
Modelowanie materiału

- w modelu sprężysto-idealnie plastycznym do granicy plastyczności (R_e) obowiązuje model liniowo-sprężysty, natomiast po jej przekroczeniu następuje płynięcie materiału, który ma zerową sztywność – wydłużenie wzrasta w nieskończoność przy stałej wartości naprężeń



Modelowanie materiału

- w modelu sprężysto-plastycznym z umocnieniem do granicy plastyczności (R_e) obowiązuje model liniowo-sprężysty, natomiast po jej przekroczeniu sztywność materiału zmniejsza się i jest opisywana modułem stycznym E^T ; druga część wykresu jest też liniowa i modeluje zjawisko umacniania się materiału

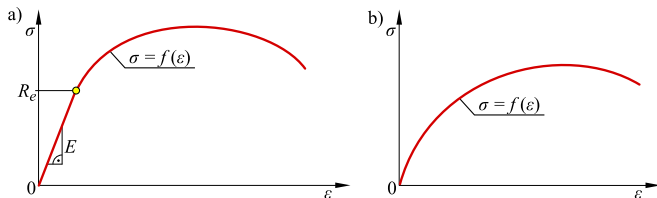


Modelowanie materiału

- nieliniowe zachowanie materiału można zamodelować dokładniej definiując funkcję $\sigma = f(\varepsilon)$, która je opisuje
- jednym z przykładów jest funkcja Ramberga-Osgood'a¹

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + K \left(\frac{\sigma}{E} \right)^n$$

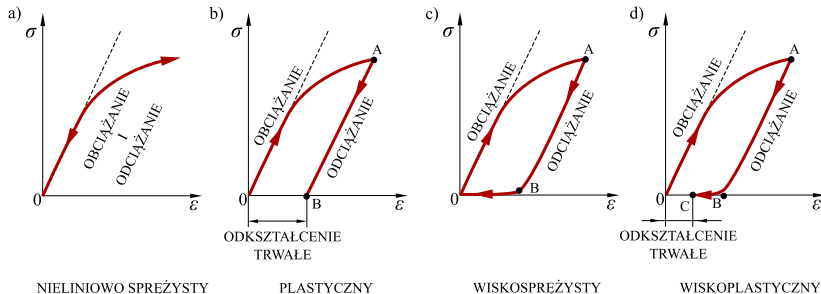
gdzie K i n są stałymi zależnymi od materiału



¹W. Ramberg, W.R. Osgood, NACA-TN-902, 1943

Modelowanie materiału

W zależności od własności, materiały mogą zachowywać się w różny sposób pod obciążeniem.

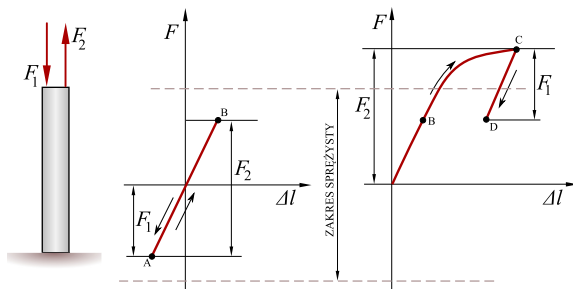


Analiza konstrukcji

- w przypadku analizy sprężysto-plastycznej nie jest spełniona zasada niezależności przykładania sił
- mówi ona, że kolejność przykładania sił nie wpływa na ostateczny wynik
- na kolejnym slajdzie wyjaśniono to na przykładzie pręta ściskanego siłą F_1 i rozciąganego siłą F_2 , która jest dwa razy większa od siły F_1
- rozpatrzono dwa przypadki: w pierwszym przykładana jest najpierw siła ściskająca F_1 a następnie siła rozciągająca F_2 ; w drugim kolejność jest odwrotna

Analiza konstrukcji

- jeśli najpierw przyłożą się siłę F_1 , a później F_2 , materiał pręta pozostaje w zakresie sprężystym
- jeśli kolejność jest odwrotna, materiał pod wpływem siły F_2 uplastycznia się, a siła F_1 sprowadza go z powrotem do stanu sprężystego, jednak w materiale pozostają trwałe odkształcenia plastyczne



Analiza konstrukcji

- analizując konstrukcję w zakresie sprężystym przyjmuje się, że maksymalne odkształcenia nie przekraczają 1%
- w zakresie sprężysto-plastycznym maksymalne odkształcenia nie przekraczają 2%
- dla przykładu: dla stali z granicą plastyczności $\sigma_{pl} = 240 \text{ MPa}$ odkształcenie uplastyczniające

$$\varepsilon_{pl} = \frac{\sigma_{pl}}{E} \cdot 100\% = \frac{240 \text{ MPa}}{200000 \text{ MPa}} \cdot 100\% = 0,12\%$$

- zatem w obu przypadkach odkształcenia są na tyle małe, że konstrukcję można analizować **w stanie nieodkształconym**

Analiza konstrukcji

- w praktyce, aby lepiej wykorzystać własności materiału, konstrukcję projektuje się na tzw. nośność graniczną

Nośność graniczna

wartość obciążenia, powyżej której układ przekształca się w mechanizm na skutek **całkowitego** uplastycznienia **niektórych** przekrojów

- zakładamy przy tym sprężysto-idealnie plastyczny model materiału i rozpatrujemy jedynie początek ruchu

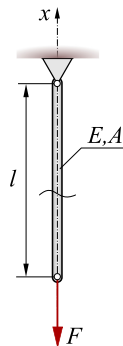
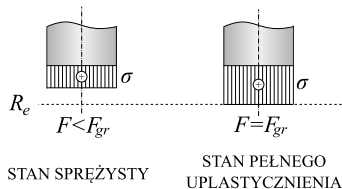
Plan wykładu

- 1 Podstawowe pojęcia
 - Założenia
 - Materiał sprężysto-plastyczny
- 2 Proste przypadki obciążenia
 - Pręty i układy prętowe
 - Skręcanie
 - Zginanie

Pręt pryzmatyczny

- pręt pryzmatyczny obciążony siłą na końcu osiągnie nośność graniczną, kiedy jego przekrój poprzeczny ulegnie całkowitemu uplastycznieniu
- obciążenie graniczne wyznaczamy z zależności

$$F_{gr} = R_e A$$

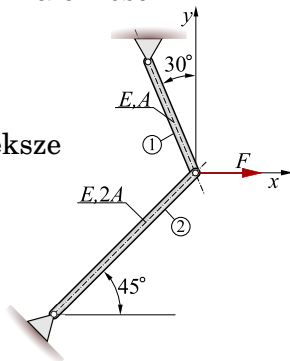
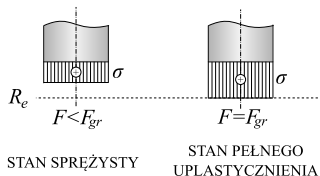


Układy statycznie wyznaczalne

- statycznie wyznaczalny układ prętów osiągnie nośność graniczną, kiedy przekrój poprzeczny jednego z nich ulegnie całkowitemu uplastycznieniu
- obciążenie graniczne wyznaczamy z zależności

$$F_{gr} = R_e A$$

przy czym należy najpierw ustalić,
w którym pręcie **naprężenia** są większe



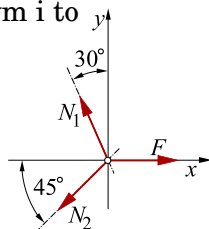
Układy statycznie wyznaczalne

- dla powyższego przykładu, z równań równowagi wyznaczamy siły wewnętrzne w prętach; mamy $N_1 = 0,87F$ oraz $N_2 = 1,06F$
- naprężenia w poszczególnych prętach będą miały wartość

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A} = 0,87 \frac{F}{A} \quad \text{oraz} \quad \sigma_2 = \frac{N_2}{2A} = 0,53 \frac{F}{A}$$

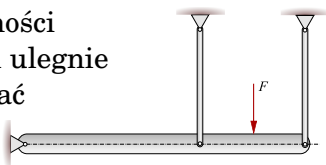
- większe naprężenia są w pręcie pierwszym i to ten pręt uplastyczni się jako pierwszy
- zatem obciążenie graniczne pojawi się, gdy $\sigma_1 = R_e$, czyli

$$R_e = 0,87 \frac{F}{A} \rightarrow F_{gr} = 1,15 R_e A$$



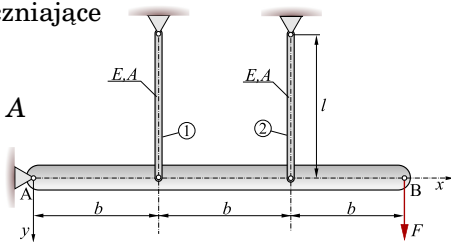
Układy statycznie niewyznaczalne

- układy statycznie niewyznaczalne tracą nośność stopniowo; uplastycznieniu ulegają kolejne pręty
- poniżej przedstawiono przykład sztywnej belki podpartej na dwóch prętach odkształcalnych
- przy założeniu, że naprężenia w prętach w danej chwili są różne, najpierw uplastyczni się pręt, w którym są one większe; mówimy wtedy o obciążeniu uplastyczniającym
- wtedy, układ belki i jednego pręta odkształcalnego przenosi całe obciążenie; sztywność układu jest mniejsza
- dopiero, gdy naprężenia w drugim pręcie osiągną granicę plastyczności układ zmienia się w mechanizm i ulegnie zniszczeniu; będzie to odpowiadać obciążeniu granicznemu



Układy statycznie niewyznaczalne

- dla układu sztywnej belki podpartej dwoma prętami o długości l :
 - wyznaczyć obciążenie uplastyczniające F_{pl} i odpowiadające mu przemieszczenie punktu B v_B
 - wyznaczyć obciążenie graniczne F_{gr} i odpowiadające mu przemieszczenie punktu B v_B
 - przedstawić wykres zależności $F-v_B$
- ponadto przyjąć
 - naprężenia uplastyczniające równe R_e
 - materiał pręta E
 - przekrój poprzeczny A



Układy statycznie niewyznaczalne

- zadanie jest statycznie niewyznaczalne, zatem oprócz równania równowagi należy przeanalizować deformację układu
- z równania równowagi momentów względem punktu A będzie

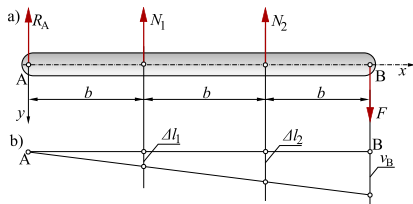
$$N_1 + 2N_2 = 3F$$

- z równania zgodności przemieszczeń mamy

$$\Delta l_2 = 2\Delta l_1$$

- zgodnie z prawem Hooke'a dla rozciągania mamy

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l}{EA} \quad \text{oraz} \quad \Delta l_2 = \frac{N_2 l}{EA}$$



Układy statycznie niewyznaczalne

- wracając do równania zgodności przemieszczeń otrzymamy $N_2 = 2N_1$
- a z równania równowagi $N_1 = \frac{3}{5}F$ oraz $N_2 = \frac{6}{5}F$
- ponieważ przekroje obu prętów są takie same, większe naprężenia pojawiają się w pręcie, w którym siła wewnętrzna jest większa, czyli w pręcie drugim
- siła uplastyczniająca będzie zatem równa

$$N_2 = R_e A \rightarrow \frac{6}{5}F = R_e A \rightarrow F_{pl} = \frac{5}{6}R_e A$$

- spróbujmy teraz wyznaczyć odpowiadające tej sile przemieszczenie punktu B, czyli v_B^{pl}

Układy statycznie niewyznaczalne

- przemieszczenia tego nie możemy wyznaczyć bezpośrednio, ale można je powiązać z wydłużeniem Δl_2 , które można wyznaczyć
- z rysunku widać, że

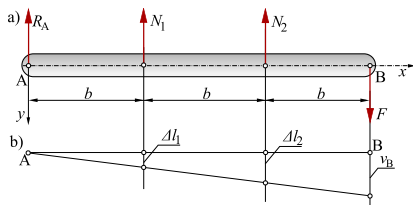
$$\frac{3b}{v_B^{pl}} = \frac{2b}{\Delta l_2}$$

czyli

$$v_B^{pl} = \frac{3}{2} \Delta l_2$$

- w stanie uplastycznienia $N_2 = R_e A$, więc wydłużenie pręta drugiego

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 l}{EA} = \frac{R_e l}{E}$$



Układy statycznie niewyznaczalne

- zatem szukane przemieszczenie punktu B jest równe

$$v_B^{pl} = \frac{3 R_e l}{2 E}$$

- w momencie osiągnięcia przez konstrukcję obciążenia granicznego siła w obu prętach będzie siłą uplastyczniającą $N_1 = N_2 = R_e A$; z równania równowagi mamy zatem

$$N_1 + 2N_2 = 3F \rightarrow R_e A + 2R_e A = 3F \rightarrow F_{gr} = R_e A$$

- w momencie uplastycznienia pręta pierwszego jego wydłużenie będzie równe $\Delta l_1 = (R_e l)/E$

Układy statycznie niewyznaczalne

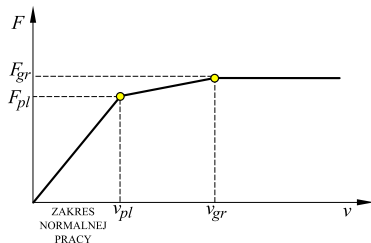
- ponieważ $v_B = 3\Delta l_1$, to przemieszczenie punktu B w momencie osiągnięcia przez konstrukcję obciążenia granicznego będzie równe

$$v_B^{pl} = \frac{3R_e l}{E}$$

- z obliczeń wynika, że obciążenie graniczne jest o 20% większe od uplastyczniającego, a przemieszczenie przy obciążeniu granicznym jest dwa razy większe niż przy uplastyczniającym

Układy statycznie niewyznaczalne

- na wykresie przedstawiającym rozwiązanie widoczne są trzy zakresy:
 - pierwszy, to zakres sprężysty, w którym układ pracuje poprawnie
 - drugi, to zakres, w którym drugi pręt jest uplastyczniony, a całe obciążenie przenoszone jest przez pręt pierwszy – sztywność układu jest mniejsza
 - trzeci, to zakres zniszczenia, w którym układ ma zerową sztywność

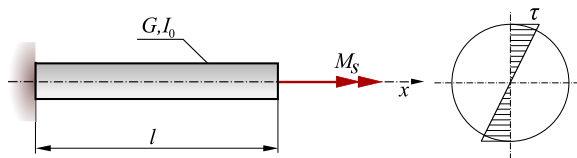


Plan wykładu

- 1 Podstawowe pojęcia
 - Założenia
 - Materiał sprężysto-plastyczny
- 2 Proste przypadki obciążenia
 - Pręty i układy prętowe
 - **Skrećanie**
 - Zginanie

Skrećanie w zakresie sprężysto-plastycznym

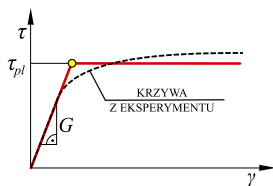
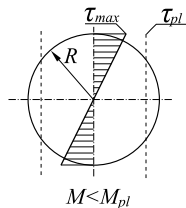
- w przypadku skrećania, analiza w zakresie sprężysto-plastycznym przebiega inaczej niż przy rozciąganiu
- wynika to rozkładu naprężeń na przekroju poprzecznym wału skrećanego
- rozkład ten zmienia się wzdłuż promienia; w osi wału naprężenia są równe zero i wzrastają liniowo aż do wartości maksymalnej na powierzchni zewnętrznej wału



Skrećanie w zakresie sprężysto-plastycznym

- przyjmujemy model materiału sprężysto-idealnie plastyczny; do naprężeń uplastyczniających τ_{pl} zachowuje się on w sposób sprężysty, a po przekroczeniu tej wartości traci zupełnie sztywność, a kąt odkształcenia postaciowego γ rośnie do nieskończoności
- w zakresie sprężystym naprężenia maksymalne, które są mniejsze od uplastyczniających ($\tau_{max} < \tau_{pl}$), wyznaczamy z zależności

$$\tau_{max} = \frac{M}{W_0}$$



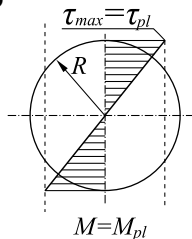
Skrećanie w zakresie sprężysto-plastycznym

- przy wzroście obciążenia naprężenia rosną aż do wartości uplastyczniającej materiał ($\tau_{max} = \tau_{pl}$) i wtedy wyrażenie na naprężenia możemy zapisać następująco

$$\tau_{max} = \frac{M_{pl}}{W_0} = \tau_{pl}$$

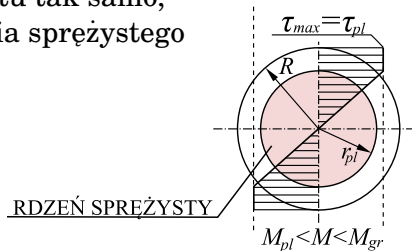
- dla wału pełnego $W_0 = 0,5\pi R^3$; możemy zatem wyznaczyć wartość momentu skręcającego powodującego uplastycznienie zewnętrznych włókien materiału

$$M_{pl} = \frac{1}{2}\pi\tau_{pl}R^3$$



Skrećanie w zakresie sprężysto-plastycznym

- przy dalszym zwiększaniu obciążenia, kolejne warstwy materiału będą się uplastyczniały
- zewnętrzna część wału, od promienia R do r_{pl} będzie w pełni uplastyczniona a naprężenia będą równe τ_{pl}
- poniżej promienia r_{pl} materiał wału będzie w stanie sprężystym i będzie stanowił tzw. rdzeń sprężysty; naprężenia wyznacza się tu tak samo, jak w przypadku skrećania sprężystego



Skrećanie w zakresie sprężysto-plastycznym

- chcąc wyznaczyć wartość momentu skręcającego w stanie sprężysto-plastycznym musimy znaleźć sumę momentów dla obszaru sprężystego M_{s-pl}^1 i plastycznego M_{s-pl}^2
- moment z obszaru sprężystego wyznaczamy typowo, przyjmując promień równy r_{pl} , na którym zaczyna się uplastycznienie

$$M_{s-pl}^1 = \frac{1}{2} \pi \tau_{pl} r_{pl}^3$$

- moment z obszaru uplastycznionego należy zdefiniować na podstawie poniższego schematu

Skrećanie w zakresie sprężysto-plastycznym

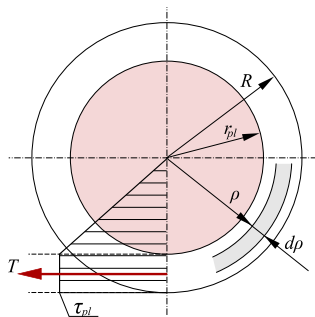
- moment definiuje się jako iloczyn siły i ramienia;
w naszym przypadku siła T generowana jest przez naprężenia τ_{pl} na długości od r_{pl} do R na ramieniu ρ
- naprężenia rozłożone są na całym obwodzie, zatem obszar, na którym działają to pierścień, który możemy zapisać jako

$$dA = 2\pi\rho d\rho$$

- moment możemy zatem zapisać

$$M_{s-pl}^2 = \int_r^R \tau_{pl} \rho dA$$

$$M_{s-pl}^2 = \frac{2}{3} \pi \tau_{pl} (R^3 - r_{pl}^3)$$



Skrećanie w zakresie sprężysto-plastycznym

- kąt skrećania w obszarze sprężystym wyznaczamy ze znanej zależności

$$\theta = \frac{M_{s-pl}^1}{GI_0} = \frac{2M_{s-pl}^1}{G\pi r_{pl}^4}$$

- podstawiając za M_{s-pl}^1 wyznaczone wcześniej wyrażenie możemy wyznaczyć promień uplastycznienia

$$r_{pl} = \frac{\tau_{pl}}{\theta G}$$

- widać, że gdy kąt skrećania θ dąży do nieskończoności, promień uplastycznienia r_{pl} dąży do zera, co oznacza uplastycznienie całego przekroju poprzecznego wału

Skrećanie w zakresie sprężysto-plastycznym

- ostateczne wyrażenie na moment w zakresie sprężysto-plastycznym otrzymamy sumując wyznaczone wyżej składowe i podstawiając do nich wyrażenie na promień uplastycznienia

$$M_{s-pl} = M_{s-pl}^1 + M_{s-pl}^2$$

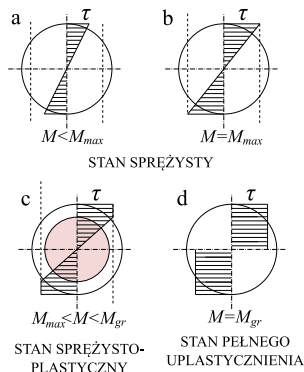
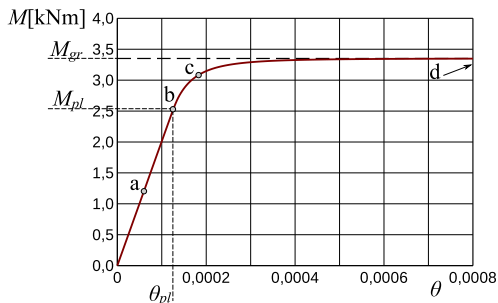
$$M_{s-pl} = \frac{2}{3}\pi\tau_{pl}R^3 - \frac{1}{6}\pi\tau_{pl}\left(\frac{\tau_{pl}}{\theta G}\right)^3$$

- pełne uplastycznienie przekroju jest tożsame z zerową sztywnością wału; wtedy kąt skrećania będzie dążył do nieskończoności; zatem drugi składnik powyższego równania będzie dążył do zera a moment graniczny M_{gr} możemy zapisać

$$M_{gr} = \frac{2}{3}\pi\tau_{pl}R^3$$

Skrećanie w zakresie sprężysto-plastycznym

- na podstawie zależności wyprowadzonych wcześniej, dla danych: $d = 20 \text{ mm}$, $G = 80000 \text{ MPa}$ i $\tau_{pl} = 200 \text{ MPa}$, sporządzono wykres przedstawiający zależność momentu obciążającego M od kąta skrećania θ



Skręcanie w zakresie sprężysto-plastycznym

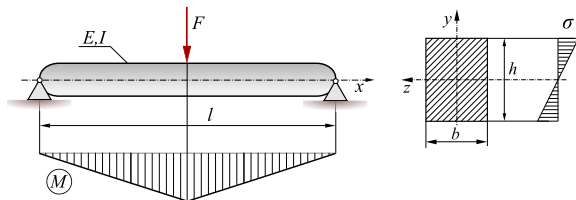
- pełne zniszczenie wału nastąpi wtedy, gdy w każdym punkcie dowolnego przekroju naprężenia osiągną granicę plastyczności; oznacza to pojawienie się przegubu plastycznego, dla którego kąt skręcenia rośnie do nieskończoności – sztywność wału jest zerowa
- warto zauważyć, że stosunek momentu granicznego M_{gr} , równoważnego ze zniszczeniem wału, do momentu uplastycznienia M_{pl} , przy którym zaczynają uplastyczniać się zewnętrzne włókna, wynosi $4/3$
- oznacza to, że istnieje zapas wytrzymałości, w postaci 33% momentu uplastycznienia, wynikający z plastycznych właściwości materiału

Plan wykładu

- 1 Podstawowe pojęcia
 - Założenia
 - Materiał sprężysto-plastyczny
- 2 Proste przypadki obciążenia
 - Pręty i układy prętowe
 - Skręcanie
 - **Zginanie**

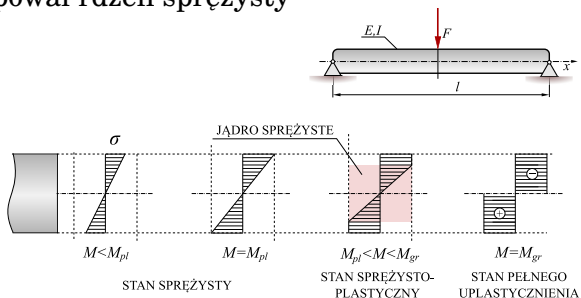
Zginanie w zakresie sprężysto-plastycznym

- analogiczną analizę można przeprowadzić dla belki zginanej; dla przypadku belki przedstawionej na rysunku rozkład naprężeń na przekroju jest liniowy – w osi belki naprężenia są równe zero, na skrajnych włóknach osiągają wartości maksymalne
- rozkład momentu na długości jest trójkątny – maksimum pojawia się w połowie długości belki
- uplastycznienie rozpocznie się zatem w połowie długości belki i będzie postępowało od skrajnych włókien do środka belki



Zginanie w zakresie sprężysto-plastycznym

- uplastycznienie rozpocznie się zatem w połowie długości belki i będzie postępowało od skrajnych włókien do środka belki
- między obciążeniem równym momentowi uplastyczniającemu i obciążeniem granicznym w belce będzie występował rdzeń sprężysty



Zginanie w zakresie sprężysto-plastycznym

- podobnie jak w przypadku skrećania, w momencie uplastycznienia całego przekroju belki pojawi się w tym miejscu przegub plastyczny, który zmieni belkę w mechanizm – zachowuje się jak dwie belki połączone w połowie długości przegubem
- stosunek momentu uplastyczniającego M_{pl} do momentu granicznego M_{gr} jest równy 1,5; oznacza to, że dzięki plastycznym właściwością materiału po przekroczeniu granicy plastyczności w skrajnych włóknach jest jeszcze zapas 50% obciążenia uplastyczniającego, zanim belka ulegnie zniszczeniu