

Wytrzymałość Materiałów II

Stateczność prętów ściskanych

opracował:

dr hab. inż. Paweł JASION

e-mail: `pawel.jasion@put.poznan.pl`

www: `pawel.jasion.pracownik.put.poznan.pl`

Politechnika Poznańska

Instytut Mechaniki Stosowanej

Zakład Wytrzymałości Materiałów i Konstrukcji

- 1 Wprowadzenie do stateczności konstrukcji
 - Równowaga układu
 - Siły błonowe

- 2 Ściskanie pręta prostego
 - Wyniki eksperymentu
 - Obciążenie krytyczne – równanie Eulera

Plan wykładu

1 Wprowadzenie do stateczności konstrukcji

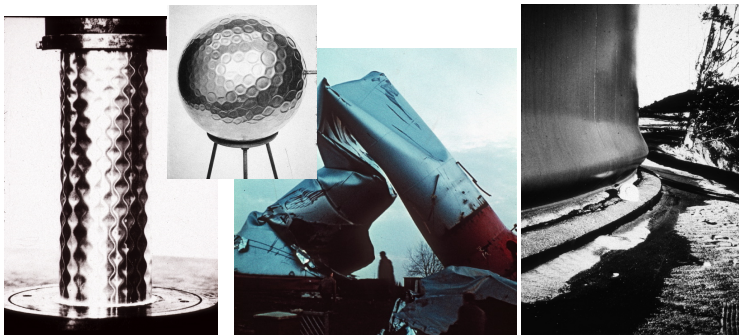
- Równowaga układu
- Siły błonowe

2 Ściskanie pręta prostego

- Wyniki eksperymentu
- Obciążenie krytyczne – równanie Eulera

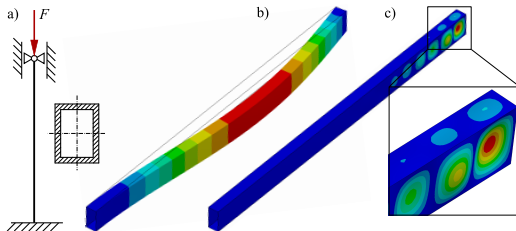
Przykłady utraty stateczności

- jednym z kryteriów definiujących niezawodność konstrukcji jest stateczność
- stateczność mogą utracić konstrukcje smukłe i cienkościenne



Utrata stateczności

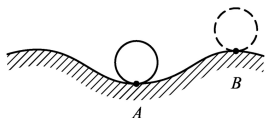
- **postać wyboczenia**, czyli kształt, jaki konstrukcja przyjmie po utracie stateczności, ma zazwyczaj kształt jednej lub kilku fal
- wyboczenie może mieć charakter globalny (b) lub lokalny (c)
- obciążenie, przy którym następuje utrata stateczności nazywamy **obciążeniem krytycznym**



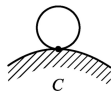
Rodzaje równowagi

- w mechanice analizujemy obiekty znajdujące się w równowadze; jednak zazwyczaj nie zastanawiamy się, jaki jest charakter tej równowagi – nie badamy stateczności
- stateczność można rozumieć jako odpowiedź systemu na zaburzenia zewnętrzne

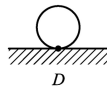
Położenie równowagi systemu jest stateczne, jeśli dowolnie małe wymuszenie wywołuje małe wychylenie systemu z tego położenia.



równowaga stateczna



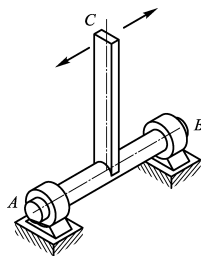
równowaga niestateczna



równowaga obojętna

Rodzaje równowagi

- w praktyce stateczność konstrukcji, zależy od:
 - typu elementu konstrukcyjnego (pręt, płyta, powłoka)
 - wymiarów geometrycznych konstrukcji
 - rodzaju podparcia i obciążenia
 - początkowych niedoskonałości geometrycznych
- stateczność należy zatem badać indywidualnie dla danego układu i rozpatrzyć różne rodzaje wymuszeń, np. działające w różnych kierunkach



Plan wykładu

1 Wprowadzenie do stateczności konstrukcji

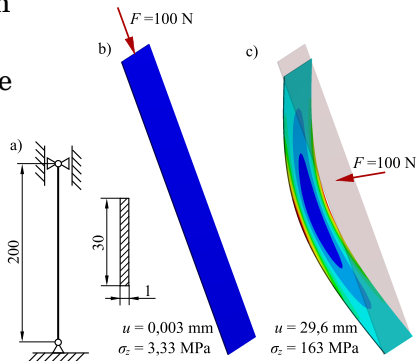
- Równowaga układu
- Siły błonowe

2 Ściskanie pręta prostego

- Wyniki eksperymentu
- Obciążenie krytyczne – równanie Eulera

Błonowy stan naprężeń

- konstrukcje smukłe i cienkościenne przenoszą obciążenia poprzez siły błonowe
- odkształcenia przy tak rozłożonych siłach są bardzo małe (b)
- jednak odkształcenia w wyniku działania sił poprzecznych są duże (c)
- zatem konstrukcje smukłe i cienkościenne wykazują dużą **sztywność błonową** i małą sztywność giętą

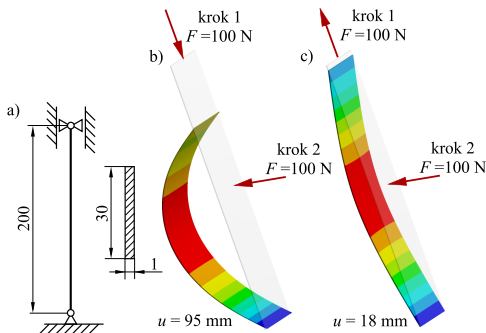


Błonowy stan naprężeń

- siły błonowe wpływają na sztywność giętą konstrukcji w dwojaki sposób
 - siły ściskające zmniejszają sztywność konstrukcji
 - siły rozciągające usztywniają konstrukcję (*stress stiffening*)
- widać to na przykładzie pręta przedstawionego na poprzednim slajdzie, który w wyniku działania siły poprzecznej ugiął się o 29,6 mm
- na następnym slajdzie przedstawiono wyniki dwóch analiz
 - w pierwszej z nich pręt został wstępnie ściśnięty siłą osiową, a dopiero później obciążony siłą poprzeczną
 - w drugiej, wstępna siła osiowa była rozciągająca

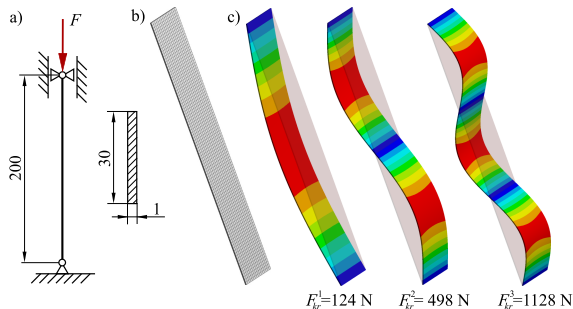
Błonowy stan naprężeń

- w pierwszym przypadku sztywność pręta spadła – ugięcie zwiększyło się o 220%
- w drugim przypadku sztywność pręta wzrosła – ugięcie zmniejszyło się o 40%



Błonowy stan naprężeń

- w skrajnym przypadku ściskające siły błonowe mogą być tak duże, że sztywność konstrukcji maleje do zera; wtedy, po przyłożeniu niewielkiej siły (zaburzenia) lub nawet bez dodatkowej siły dochodzi do ugięcia konstrukcji – konstrukcja traci stateczność



Błonowy stan naprężeń

- zjawisko utraty stateczności można wytłumaczyć przy pomocy podejścia energetycznego
- obciążenie przyłożone do konstrukcji wywołuje jej przemieszczenie; wykonuje zatem pracę, która jest zamieniana na energię odkształcenia postaciowego

$$W_e = \frac{1}{2}F\Delta l; \quad U_\epsilon = \frac{F^2 l}{2EA}$$

- ponieważ siły błonowe są duże, duża jest również energia odkształcenia

Błonowy stan naprężeń

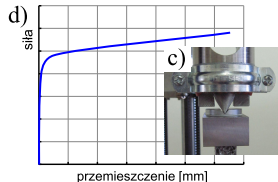
- w momencie utraty stateczności następuje samoistna zamiana energii odkształcenia stanu błonowego w energię odkształcenia stanu zgięciowego
- ponieważ sztywność zgięciowa jest dużo mniejsza, aby zaabsorbować całą energię potrzebne jest duże ugięcie
- ilość energii pozostaje taka sama (poza niewielkimi stratami) ale odpowiada jej inna konfiguracja geometryczna
- zwykle prowadzi to do zniszczenia konstrukcji

Plan wykładu

- 1 Wprowadzenie do stateczności konstrukcji
 - Równowaga układu
 - Siły błonowe
- 2 Ściskanie pręta prostego
 - Wyniki eksperymentu
 - Obciążenie krytyczne – równanie Eulera

Ściskanie pręta – eksperyment

- eksperyment pokazuje, że nawet przy osiowym ściskaniu pręt nieznacznie ugina się wraz ze wzrostem siły, a w pewnym momencie ugięcie to wzrasta gwałtownie – pręt traci stateczność



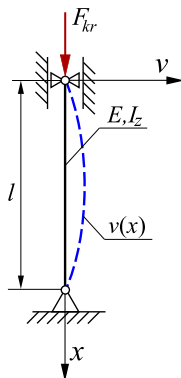
Plan wykładu

- 1 Wprowadzenie do stateczności konstrukcji
 - Równowaga układu
 - Siły błonowe
- 2 Ściskanie pręta prostego
 - Wyniki eksperymentu
 - Obciążenie krytyczne – równanie Eulera

Obciążenie krytyczne (Euler 1744)

Wyboczenie sprężyste

- rozpatrzmy belkę ściskaną podpartą przegubowo na obu końcach; jeśli siła przyłożona jest w środku ciężkości przekroju poprzecznego i działa wzdłuż osi belki, to postać prostoliniowa jest postacią równowagi.
- spróbujemy znaleźć wartość siły, przy której ugięty pręt również pozostaje w równowadze (siłę krytyczną)
- stateczność konstrukcji analizujemy w stanie odkształconym**



Obciążenie krytyczne (Euler 1744)

Wyboczenie sprężyste

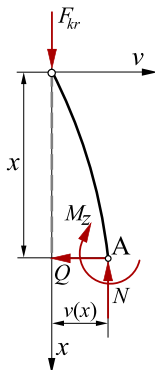
- rozpatrzmy równowagę odciętego, ugiętego fragmentu belki
- trzy nieznane siły wewnętrzne możemy wyznaczyć z równań równowagi

$$\sum F_x = 0 \rightarrow N = F_{kr}$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow Q = 0$$

$$\sum M_A = 0 \rightarrow M_z - F_{kr}v = 0$$

- praktyczne znaczenie będzie miało równanie ostatnie



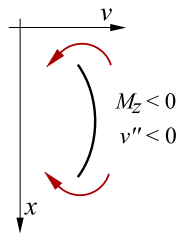
Obciążenie krytyczne (Euler 1744)

Wyboczenie sprężyste

- rozpatrujemy belkę w stanie zaburzonym
- zaburzenie to musi być małe, zatem ugięcie $v(x)$ również jest małe
- możemy zatem skorzystać z przybliżonego równania linii ugięcia belki (prawdziwego dla małych ugięć) aby uzyskać wyrażenie na M_z będące funkcją ugięcia

$$v'' = \pm \frac{M_z}{EI_z} \rightarrow M_z = \pm v'' EI_z$$

- zgodnie z przyjętą konwencją znaków, dla przyjętego układu współrzędnych druga pochodna będzie w naszym przypadku ujemna



Obciążenie krytyczne (Euler 1744)

Wyboczenie sprężyste

- podstawiając otrzymane wyżej wyrażenie na moment gnący do równania równowagi otrzymamy liniowe równanie różniczkowe o stałych współczynnikach

$$v''EI_z + F_{kr}v = 0$$

- dzielimy równanie przez EI_z i przyjmując $k^2 = F_{kr}/(EI_z)$ otrzymamy

$$v'' + k^2v = 0$$

- ogólne rozwiązanie tego równania to

$$v = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx \quad (1)$$

gdzie C_1 i C_2 są stałymi

Obciążenie krytyczne (Euler 1744)

Wyboczenie sprężyste

- stałe C_1 i C_2 wyznaczamy z warunków brzegowych; w rozważanym przypadku mamy dwa warunki:
 - $v(0) = 0$
 - $v(l) = 0$
- z pierwszego warunku otrzymamy $C_2 = 0$
- z drugiego warunku, uwzględniając powyższe, otrzymamy równanie

$$C_1 \sin kl = 0$$

- jest ono spełnione w dwóch przypadkach

Obciążenie krytyczne (Euler 1744)

Wyboczenie sprężyste

- **przypadek pierwszy:** $C_1 = 0$; pamiętając, że $C_2 = 0$, równanie (1) przyjmie postać

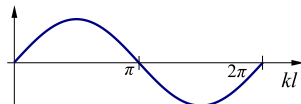
$$v \equiv 0$$

- na podstawie tego rozwiązania możemy stwierdzić, że pręt nieodkształcony pozostaje w stanie równowagi
- ponieważ jednak, jego wychylenie, będące zaburzeniem, jest równe zeru, nie możemy wnioskować o charakterze tej równowagi
- rozwiązanie to nie daje również informacji na temat obciążenia krytycznego

Obciążenie krytyczne (Euler 1744)

Wyboczenie sprężyste

- **przypadek drugi: $C_1 \neq 0$** ; wtedy musi być prawdą, że $\sin kl = 0$
- to z kolei jest prawdziwe, gdy



$$kl = n\pi$$

gdzie $n = 1, 2, \dots$

- pozwala nam to wyznaczyć stałą k

$$k = \frac{n\pi}{l} \text{ a ponieważ } k^2 = \frac{F_{kr}}{EI_z}$$

- otrzymujemy ostatecznie wyrażenie na siłę krytyczną

$$F_{kr} = \frac{n^2 \pi^2 EI_z}{l^2} \quad (2)$$

Obciążenie krytyczne (Euler 1744)

Wyboczenie sprężyste

- z wyrażeniem na siłę krytyczną związane jest równanie ugięcia pręta (1), które, dla $C_2 = 0$ przyjmuje postać

$$v(x) = C_1 \sin kx$$

- podstawiając wyznaczone wyżej wyrażenie na k otrzymamy linię ugięcia pręta po utracie stateczności

$$v(x) = C_1 \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (3)$$

- aby zrozumieć sens fizyczny otrzymanego rozwiązania rozważmy przypadek dla $n = 1$

Obciążenie krytyczne (Euler 1744)

Wyboczenie sprężyste

- zakładając, że $n = 1$, równania (2) i (3) przyjmą postać

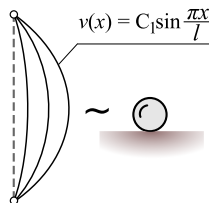
$$F_{kr}^{(1)} = \frac{\pi^2 EI_z}{l^2} \quad \text{oraz} \quad v^{(1)}(x) = C_1 \sin \frac{\pi x}{l}$$

- oznacza to, że przy sile krytycznej $F_{kr}^{(1)}$ zaburzony stan pręta opisany jest krzywą $v^{(1)}(x)$
- stan ten jest stanem równowagi dla dowolnej wartości C_1 , która w tym przypadku odpowiada maksymalnemu wychyleniu pręta v_{max}
- wszystkie możliwe ugięte postacie pręta są możliwymi stanami równowagi

Obciążenie krytyczne (Euler 1744)

Wyboczenie sprężyste

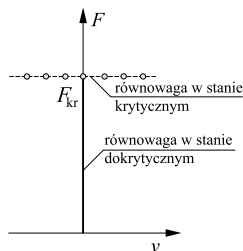
- ponieważ C_1 jest dowolną liczbą, różną od zera, to przy sile $F_{kr} = F_{kr}^{(1)}$ oprócz prostoliniowego stanu równowagi pojawia się nieskończenie wiele przyległych zgiętych stanów
- w ten sposób nieugięty stan równowagi staje się obojętnym (niestatecznym)



Obciążenie krytyczne (Euler 1744)

Wyboczenie sprężyste

- rozwiązanie otrzymane metodą Eulera pozwala ustalić, że:
 - przy sile $F \leq F_{kr}$ pręt jest w stanie równowagi i pozostaje prosty
 - przy sile $F = F_{kr}$ pojawia się nieskończenie wiele stanów równowagi
- nie można natomiast powiedzieć nic o charakterze równowagi – czy jest stateczny czy niestateczny
- rozwiązanie graficzne to nieskończona liczba punktów rozłożonych na prostej odpowiadającej sile $F = F_{kr}$



Obciążenie krytyczne (Euler 1744)

Wyboczenie sprężyste

- w ogólnym rozwiązaniu pojawia się n , które może przyjmować wartości całkowite

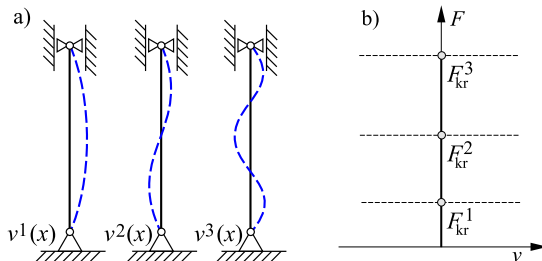
$$F_{kr} = \frac{n^2 \pi^2 EI_z}{l^2}; \quad v(x) = C_1 \sin \frac{n\pi x}{l}$$

- oznacza to, że możliwe są inne wartości siły krytycznej i odpowiadające im postacie wyboczenia
- wartość kolejnych obciążeń krytycznych będzie szybko wzrastać z kwadratem n , natomiast do postaci wyboczenia będą dochodziły kolejne półfale

Obciążenie krytyczne (Euler 1744)

Wyboczenie sprężyste

- trzy pierwsze postacie wyboczenia oraz odpowiadające im obciążenia krytyczne przedstawiono poniżej



Obciążenie krytyczne (Euler 1744)

Wyboczenie sprężyste

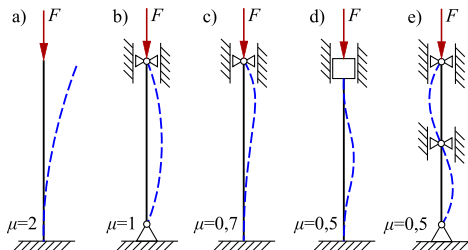
- z praktycznego punktu widzenia najważniejsza jest pierwsza wartość siły krytycznej i pierwsza postać wyboczenia, ponieważ zazwyczaj obciążenie przykładane jest stopniowo, od zera do wartości maksymalnej, więc wyboczenie pojawi się przy pierwszej możliwej sile krytycznej
- wyższe postacie wyboczenia mogą mieć znaczenie przy obciążeniach dynamicznych, gdy obciążenie przykładane jest w sposób nagły

Wpływ sposobu utwierdzenia

- stosując podejście Eulera można rozwiązać zagadnienie stateczności prętów o różnych podparciach. Ogólne wyrażenie na najniższą siłę krytyczną ma postać

$$F_{kr} = \frac{\pi^2 EI_z}{(\mu l)^2}$$

gdzie współczynnik μ zależy od warunków podparcia



Kontrolowanie stateczności

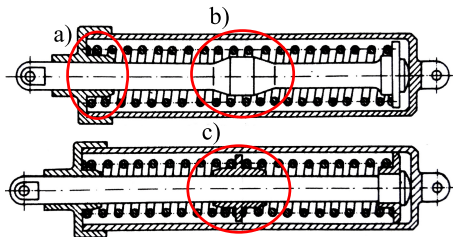
- przeanalizujemy wyrażenie na obciążenie krytyczne

$$F_{kr} = \frac{\pi^2 EI_z}{(\mu l)^2}$$

- w przeważającej większości przypadków konstrukcji, na etapie projektowania próbuje się albo uniknąć utraty stateczności, albo zwiększyć maksymalnie wartość obciążenia krytycznego
- zgodnie z powyższą zależnością, najbardziej efektywnym sposobem zwiększenia siły krytycznej jest zmniejszenie długości l pręta lub ewentualna zmiana sposobu podparcia μ – likwidacja przegubu
- innym sposobem jest zmiana kształtu przekroju poprzecznego – zwiększenie momentu bezwładności I_z

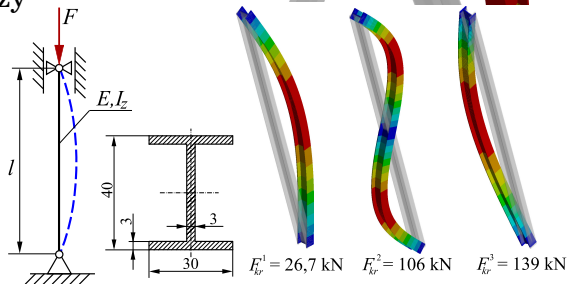
Kontrolowanie stateczności

- przykładem elementu, który może ulec wyboczeniu jest długa sprężyna
- poniżej przedstawiono sposoby zwiększenia jej stateczności
 - wydłużenie części prowadzącej – usunięcie przegubu (a)
 - prowadzenie w połowie długości – dodatkowa podpora (b)
 - zastąpienie jednej długiej sprężyny dwoma krótszymi – zmniejszenie długości (c)



Kontrolowanie stateczności

- w przypadku prętów o przekroju okrągłym kierunku wyboczenia nie da się przewidzieć
- w przypadku innych przekroi pierwsza postać wyboczenia będzie wynikała z kierunku, dla którego moment bezwładności jest najmniejszy



Obciążenie krytyczne – rozwiązanie dokładne

Wyboczenie sprężyste

- w rozwiązaniu Eulera przyjmuje się przybliżone wyrażenie na krzywiznę pręta, co daje równanie

$$v'' + k^2 v = 0$$

i przybliżone rozwiązanie problemu

- rozwiązanie dokładne otrzyma się rozwiązując równanie

$$\frac{v''}{(1 + (v')^2)^{3/2}} + k^2 v = 0$$

w którym uwzględnia się pełne wyrażenie na krzywiznę

Nieliniowa analiza stateczności

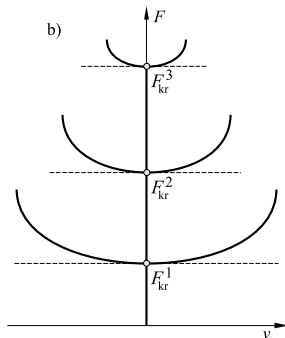
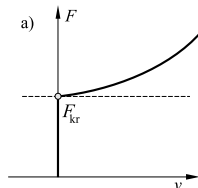
Ścieżka równowagi

- rozwiązanie dokładne pozwala uzyskać tzw. **ścieżkę równowagi**, która jest wykresem przedstawiającym zależność przemieszczenia wybranego punktu konstrukcji od wartości obciążenia
- otrzymujemy zatem pełną informację co dzieje się z konstrukcją w obszarze dokrytycznym w punkcie krytycznym raz w obszarze zakrytycznym, czyli po utracie stateczności
- ze ścieżki równowagi możemy więc odczytać, czy równowaga układu po utracie stateczności jest stateczna czy niestateczna

Nieliniowa analiza stateczności

Ścieżka równowagi

- pojedynczą ścieżkę równowagi dla pręta ściskanego przedstawiono na rysunku a); po utracie stateczności pręt ugina się, a obciążenie rośnie; oznacza to, że ścieżka równowagi jest stateczna – do zwiększenia ugięcia wymagane jest zwiększenie obciążenia
- rozwiązanie dokładne dla trzech pierwszych postaci wyboczenia przedstawiono na rysunku b)



Nieliniowa analiza stateczności

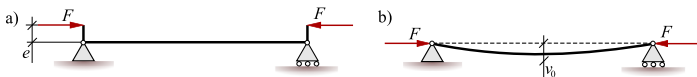
Pręty rzeczywiste

- do tej pory zakładaliśmy, że pręt jest idealnie prosty, a siła przyłożona jest w osi pręta
- w rzeczywistych konstrukcjach zawsze pojawiają się niedoskonałości (imperfekcje) zaburzające stan idealny; są nimi
 - niedoskonałości geometryczne – skrzywienie pręta wynikające z procesu produkcji; wstępne ugięcie powstałe przy montażu
 - niedoskonałości warunków brzegowych – mimośrodowo przyłożona siła; mimośrodowe podparcie
 - niedoskonałości materiałowe – niejednorodność lub nieciągłość materiału
- wszystkie powyższe czynniki wpływają na zjawisko utraty stateczności

Nieliniowa analiza stateczności

Pręty rzeczywiste

- wpływ mimośrodowego przyłożenia siły oraz wstępnego ugięcia pręta można określić rozwiązując poniższe zagadnienia

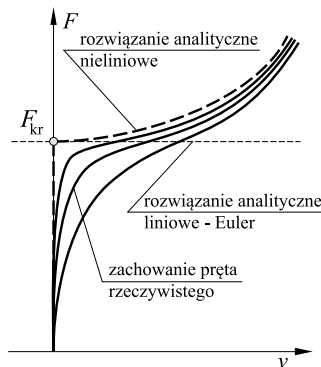


- w obu przypadkach, co widać nawet bez rozwiązywania zagadnienia, pręt będzie się ugiął od samego początku
- stopień tego ugięcia będzie zależał od wielkości niedoskonałości początkowych

Nieliniowa analiza stateczności

Pręty rzeczywiste

- poniżej przedstawiono typowe ścieżki równowagi dla pręta z niedoskonałościami
- widać, że ścieżki równowagi odbiegają od rozwiązania analitycznego tym bardziej, im większa jest niedoskonałość początkowa

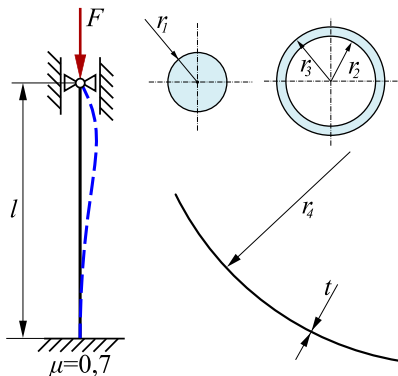


Obciążenie krytyczne – wyboczenie sprężyste

Przykład

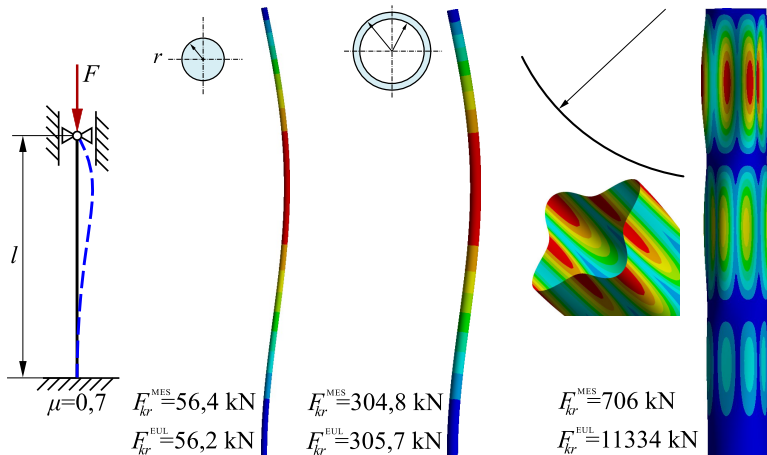
Wyznaczyć wartość obciążenia krytycznego przedstawionego na rysunku. Rozpatrzeć trzy różne przekroje poprzeczne przy założeniu, że masa pozostaje niezmienna.

- $r_1 = 20 \text{ mm}$
- $r_2 = 30 \text{ mm}$
- $r_3 = 36 \text{ mm}$
- $r_4 = 200,5 \text{ mm}$
- $t = 1 \text{ mm}$
- $l = 3000 \text{ mm}$
- $E = 200000 \text{ MPa}$



Obciążenie krytyczne – wyboczenie sprężyste

Przykład – rozwiązanie



Obciążenie krytyczne – wyboczenie sprężyste

Zwiększanie sztywności

- sztywność elementów smukłych można zwiększyć wprowadzając modyfikacje ich geometrii
- modyfikacje te często są wynikiem obserwacji natury
 - rura cienkościenna wypełniona lekką pianką
 - rura cienkościenna z żebrami
 - rura z materiału porowatego
 - **cibora papirusowa – przekrój trójkątny**



Obciążenie krytyczne – wyboczenie sprężyste

Zwiększanie sztywności

