

Zagadnienia osiowo-symetryczne

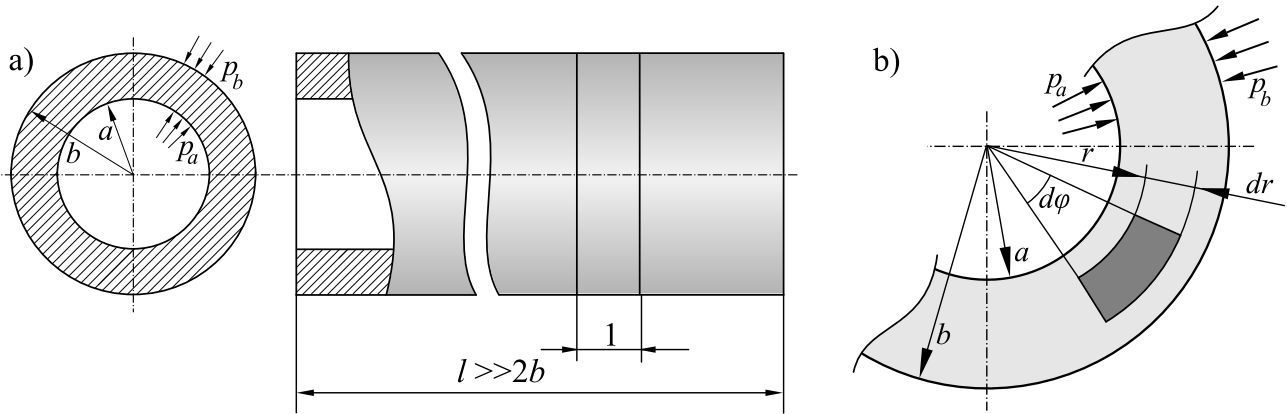
Cylindry grubościennie – Zagadnienie Lamé’go

Analizę naprężeń w cylindrze grubościennym rozpoczniemy od sformułowania założeń. Przede wszystkim rozważania będziemy prowadzili dla cylindra otwartego, którego długość jest dużo większa niż średnica zewnętrzna, a naprężenia będą badane z dala od punktu podparcia. Prawdziwe będzie wtedy, że

- odkształcenia są symetryczne względem osi obrotu i nie zmieniają się na długości cylindra,
- z powodu symetrii nie występują siły styczne,
- przekrój poprzeczny pozostaje płaski po przyłożeniu obciążenia.

Mamy zatem do czynienia z płaskim stanem naprężeń.

Rozpatrzmy cylinder, którego promień wewnętrzny równy jest a , natomiast promień zewnętrzny b . Z cylindra wytniemy, dwoma równoległymi płaszczyznami, pierścień o jednostkowej grubości, jak przedstawiono na Rys. 1a. Zakłada się, że w ogólnym przypadku cylinder może być jednocześnie obciążony równomiernym ciśnieniem wewnętrznym p_a i zewnętrznym p_b .



Rys. 1. Cylinder grubościenny: wymiary a); wycinek elementarny b)

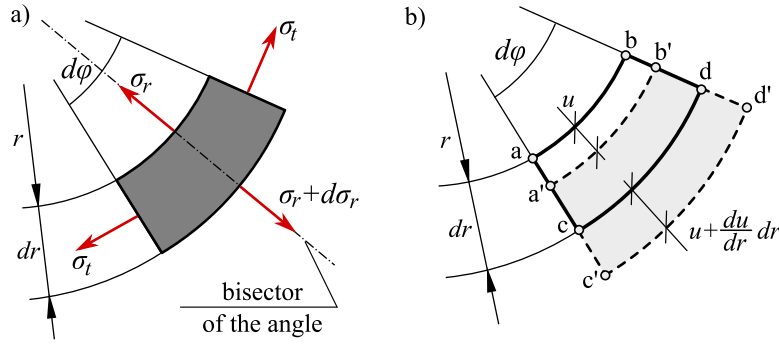
Z pierścienia, dwoma promieniami odchylonymi o kąt $d\varphi$, wycinamy nieskończenie mały element o długości dr (Rys. 1b). Na każdą ze ścianek elementu będą działały naprężenia. Ponieważ zagadnienie jest kołowo-symetryczne będą to dwie składowe: promieniowa σ_r oraz obwodowa σ_t . Ze względu na symetrię, naprężenia obwodowe po obu stronach będą sobie równe. Natomiast naprężenia promieniowe zmieniają się, ponieważ przyrasta współrzędna r . Na powierzchni wewnętrznej będziemy mieli $\sigma_r(r) = \sigma_r$, natomiast na powierzchni zewnętrznej $\sigma_r(r + dr) \approx \sigma_r + d\sigma_r$.

Aby wyznaczyć wartości naprężeń zapiszemy równanie równowagi dla wyciętego fragmentu, przedstawionego na Rys. 2a. Będzie to równanie rzutów wszystkich sił na dwusieczną kąta $d\varphi$. Aby otrzymać siły, musimy przemnożyć naprężenia przez powierzchnie, na których działają. Ponieważ grubość wycinka jest równa jedności, wystarczy naprężenia przemnożyć przez długość odpowiedniej krawędzi. Będziemy zatem mieli

$$-\sigma_r r d\varphi + (\sigma_r + d\sigma_r)(r + dr)d\varphi - 2\sigma_t \sin \frac{d\varphi}{2} dr = 0 \quad (1)$$

Zauważmy, że kąt $d\varphi$ jest bardzo mały, a sinus małego kąta jest równy temu kątowi. Możemy zatem zapisać

$$\sin \frac{d\varphi}{2} \approx \frac{d\varphi}{2}$$



Rys. 2. Elementarny wycinek cylindra: naprężenia a); deformacja b)

Przyrost naprężeń, $d\sigma_r$, jako różniczkę funkcji, zapiszmy w postaci

$$d\sigma_r = \frac{d\sigma_r}{dr} dr$$

Podstawiając powyższe do równania (1) i wymnażając otrzymamy

$$-\sigma_r r d\varphi + \sigma_r r d\varphi + \sigma_r dr d\varphi + \frac{d\sigma_r}{dr} r dr d\varphi + \frac{d\sigma_r}{dr} dr^2 d\varphi - \sigma_t d\varphi dr = 0$$

Po uproszczeniu, pominięciu wielkości mały drugiego rzędu (dr^2) i podzieleniu równania przez $d\varphi dr$ otrzymamy

$$\sigma_r - \sigma_t + \frac{d\sigma_r}{dr} r = 0 \quad (2)$$

Jest to jedyne równanie równowagi, jakie możemy zapisać. Ponieważ jednak do wyznaczenia są dwie zmienne potrzebne jest dodatkowe równanie, które można otrzymać analizując odkształcenia elementarnego wycinka $abcd$ cylindra (Rys. 2). Pod wpływem działania obciążenia, cylinder ulegnie deformacji, a elementarny wycinek przemieści się i odkształci tak, że łuk ab przemieści się o $u(r) = u$, a łuk cd o $u(r + dr) \approx u + du$. Zatem odkształcenia pojawią się zarówno w kierunku obwodowym i te oznaczmy jako ε_t , jak i w kierunku promieniowym i te oznaczmy jako ε_r . Te pierwsze będą powodowały wydłużanie się każdego, wybranego łuku na elemencie $abcd$, a te drugie wydłużanie się elementarnego promienia dr . Spróbujmy zatem, zgodnie z definicją, zapisać odkształcenia promieniowe i obwodowe.

Odkształcenie normalne to przyrost długości odniesiony do długości początkowej. W przypadku odkształcenia promieniowego analizowana długość początkowa to dr lub inaczej odcinek ac . Po odkształceniu odcinek ten będzie miał długość $a'c'$. Można zauważyć, że zmiana długości odcinka ab będzie równa różnicy długości odcinków $a'c'$ i ac , a ta będzie równa różnicy w przemieszczeniu punktu c i a . Można zatem zapisać

$$\varepsilon_r = \frac{\Delta dr}{dr} = \frac{a'c' - ac}{ac} = \frac{u + du - u}{dr} = \frac{du}{dr}$$

Aby zdefiniować odkształcenie obwodowe, przeanalizujemy zmianę długości łuku ab , który przed odkształceniem jest równy $rd\varphi$. Po odkształceniu zmienia się on w łuk $a'b'$, którego długość równa jest $(r+u)d\varphi$. Korzystając ponownie z definicji odkształcenia normalnego możemy zapisać

$$\varepsilon_t = \frac{a'b' - ab}{ab} = \frac{(r+u)d\varphi - rd\varphi}{rd\varphi} = \frac{u}{r}$$

Zatem odkształcenia, promieniowe i obwodowe, w cylindrze grubościennym definiujemy następująco

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr} \quad \text{oraz} \quad \varepsilon_t = \frac{u}{r} \quad (3)$$

Jak widać, oba odkształcenia są funkcjami przemieszczenia u . Zatem, jeśli zapiszemy naprężenia jako funkcje odkształcenia, to również one będą funkcjami przemieszczenia. Wtedy, podstawiając je do równania (2), otrzymamy równanie, w którym będzie tylko jedna nieznaną funkcją, a mianowicie przemieszczenie u .

Wiemy, że wyrażeniem wiążącym naprężenia i odkształcenia jest prawo Hooke'a. Dla płaskiego stanu naprężeń, z jakim mamy tu do czynienia, ma ono postać

$$\sigma_r = \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_r + \nu \varepsilon_t)$$

$$\sigma_t = \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_t + \nu \varepsilon_r)$$

Podstawiając do powyższego układu równań wyrażenia na odkształcenia otrzymamy

$$\sigma_r = \frac{E}{1 - \nu^2} \left(\frac{du}{dr} + \nu \frac{u}{r} \right)$$

$$\sigma_t = \frac{E}{1 - \nu^2} \left(\frac{u}{r} + \nu \frac{du}{dr} \right)$$
(4)

Teraz możemy podstawić powyższe zależności do równania (2). Jak można zauważyć, po podstawieniu każdy element równania będzie zawierał stałą $E/(1 - \nu^2)$. Ponieważ lewa strona jest przyrównana do zera, stałą zostanie wyeliminowana z równania, zatem przy podstawianiu można ją pominąć. Ponadto, zanim zaczniemy podstawianie, wyznaczmy pochodną naprężeń promieniowych, która pojawia się w równaniu. Pamiętając, że u jest funkcją promienia r , a ten jest naszą zmienną oraz korzystając z zależności na pochodną ilorazu, mamy

$$\frac{d\sigma_r}{dr} = \frac{d}{dr} \left(\frac{du}{dr} + \nu \frac{u}{r} \right) = \frac{d^2u}{dr^2} + \nu \left(\frac{\frac{du}{dr} r - u \frac{dr}{dr}}{r^2} \right) = \frac{d^2u}{dr^2} + \nu \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \nu \frac{u}{r^2}$$

Podstawiając powyższe wyrażenie na pochodną oraz naprężenia wyrażone prawem Hooke'a do równania równowagi (2), po uporządkowaniu i podzieleniu przez r otrzymamy

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = 0$$
(5)

W ten sposób otrzymaliśmy równanie pozwalające wyznaczyć przemieszczenie u . Ogólne rozwiązanie tego równania ma postać

$$u = C_1 r + \frac{C_2}{r}$$

co można sprawdzić podstawiając funkcję oraz jej pierwszą i drugą pochodną z powrotem do równania (5). Podstawiając z kolei wyrażenie na u do prawa Hooke'a i porządkując, uzyskuje się rozwiązanie problemu, czyli dwa równania pozwalające wyznaczyć wartości naprężeń w cylindrze grubościennym.

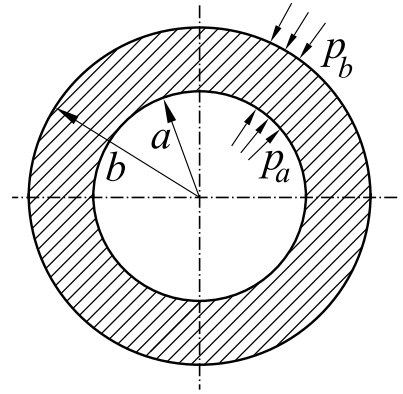
$$\sigma_r = \frac{E}{1 - \nu^2} \left[C_1(1 + \nu) - C_2 \frac{1 - \nu}{r^2} \right]$$

$$\sigma_t = \frac{E}{1 - \nu^2} \left[C_1(1 + \nu) + C_2 \frac{1 - \nu}{r^2} \right]$$
(6)

Warto zauważyć, że różnica między równaniami jest tylko w znaku przed stałą C_2 .

Powyższe rozwiązanie jest rozwiązaniem ogólnym, zawierającym dwie stałe C_1 i C_2 . Stałe te wyznacza się w zależności od warunków brzegowych. Zgodnie z Rys. 3 możliwe są trzy przypadki warunków brzegowych:

1. dla $r = a$ naprężenia $\sigma_r = p_a$ oraz dla $r = b$ naprężenia $\sigma_r = p_b$; oznacza to, że cylinder obciążony jest od wewnątrz ciśnieniem p_a oraz od zewnątrz ciśnieniem p_b
2. dla $r = a$ naprężenia $\sigma_r = p_a$ oraz dla $r = b$ naprężenia $\sigma_r = 0$; oznacza to, że cylinder obciążony jest tylko ciśnieniem wewnętrznym p_a
3. dla $r = a$ naprężenia $\sigma_r = 0$ oraz dla $r = b$ naprężenia $\sigma_r = p_b$; oznacza to, że cylinder obciążony jest tylko ciśnieniem zewnętrznym p_b



Rys. 3. Przekrój cylindra grubościennego

Wyznaczone z warunków brzegowych stałe podstawia się do równań (6) i w ten sposób otrzymuje się zależności pozwalające wyznaczyć rozkłady naprężeń na przekroju cylindra. We wszystkich przypadkach zmienną jest promień r , który zmienia się od a do b .

Najbardziej ogólnym przypadkiem jest pierwszy. Po wyznaczeniu stałych i wstawieniu ich do równań, otrzymujemy

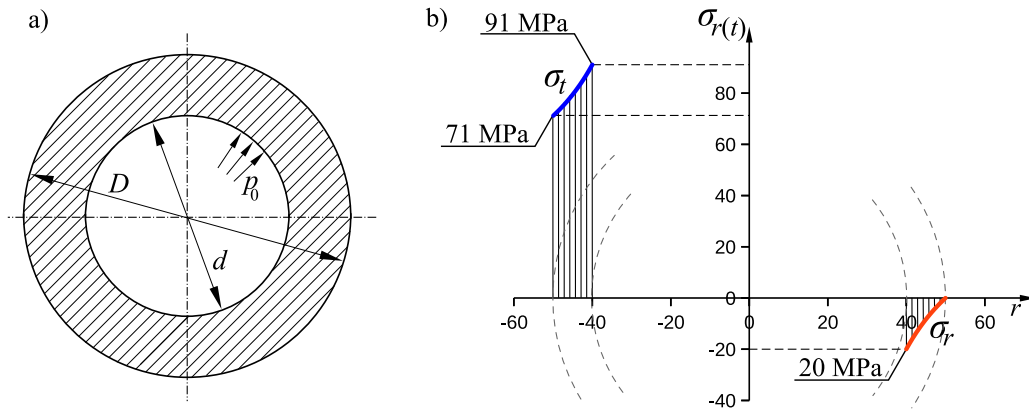
$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{p_a a^2}{b^2 - a^2} \left(1 - \frac{b^2}{r^2}\right) - \frac{p_b b^2}{b^2 - a^2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) \\ \sigma_t &= \frac{p_a a^2}{b^2 - a^2} \left(1 + \frac{b^2}{r^2}\right) - \frac{p_b b^2}{b^2 - a^2} \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right)\end{aligned}\tag{7}$$

Oba równania różnią się znakiem w nawiasach. Ponadto widać, że z równań tych można otrzymać zależności na dwa pozostałe przypadki warunków brzegowych, podstawiając odpowiednio $p_a = 0$ lub $p_b = 0$.

Przykłady obliczeniowe

Przykład 1

Wyznaczyć rozkład naprężeń w grubościennym cylindrze hydraulicznym, dla którego maksymalne ciśnienie robocze ma wartość $p_0 = 20$ MPa. Średnica wewnętrzna $d = 40$ mm i średnica zewnętrzna $D = 50$ mm.



Rys. 4. Przykład 1: przekrój cylindra a); rozkład naprężeń b)

Zgodnie z ogólnym rozwiązaniem, równanie(7), możemy zdefiniować następujące parametry. Podstawiając je do rozwiązania otrzymamy $a = d/2$, $b = D/2$, $p_a = p_0$, $p_b = 0$

$$\sigma_r = \frac{p_0 d^2}{D^2 - d^2} \left(1 - \frac{D^2}{4r^2} \right) \quad \sigma_t = \frac{p_0 d^2}{D^2 - d^2} \left(1 + \frac{D^2}{4r^2} \right)$$

Podstawiając zadane wartości otrzymujemy wykresy przedstawione na Rys. 4b. Widać, że na wytrzymałość cylindra kluczowy wpływ mają naprężenia obwodowe. Zwykle to one prowadzą do zniszczenia w postaci pęknięcia wzdłuż tworzącej walca.

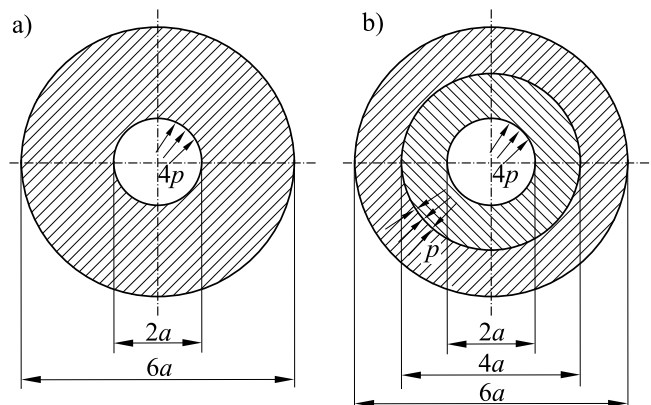
Przykład 2

Porównać rozkłady naprężeń w dwóch wariantach cylindra grubościennego obciążonego ciśnieniem wewnętrznym $5p$. Pierwszy wariant (Fig. a) wykonany jest jako pojedyncza rura. Drugi wariant (Fig. b) składa się z dwóch rur połączonych skurczowo. Zakłada się, że ciśnienie pomiędzy rurami w wyniku połączenia skurczowego wynosi p .

Zacniemy od analizy naprężeń w cylindrze wykonanym z pojedynczej rury. Jego wymiary to: średnica wewnętrzna a i średnica zewnętrzna $3a$. Cylinder obciążony jest tylko ciśnieniem wewnętrznym, zatem $\sigma_a = 5p$, a $\sigma_b = 0$. Podstawiając te dane do ogólnego rozwiązania, równanie (7), otrzymamy wzory na wyznaczanie rozkładów naprężeń

$$\sigma_r = \frac{1}{2}p \left(1 - \frac{9a^2}{r^2} \right)$$

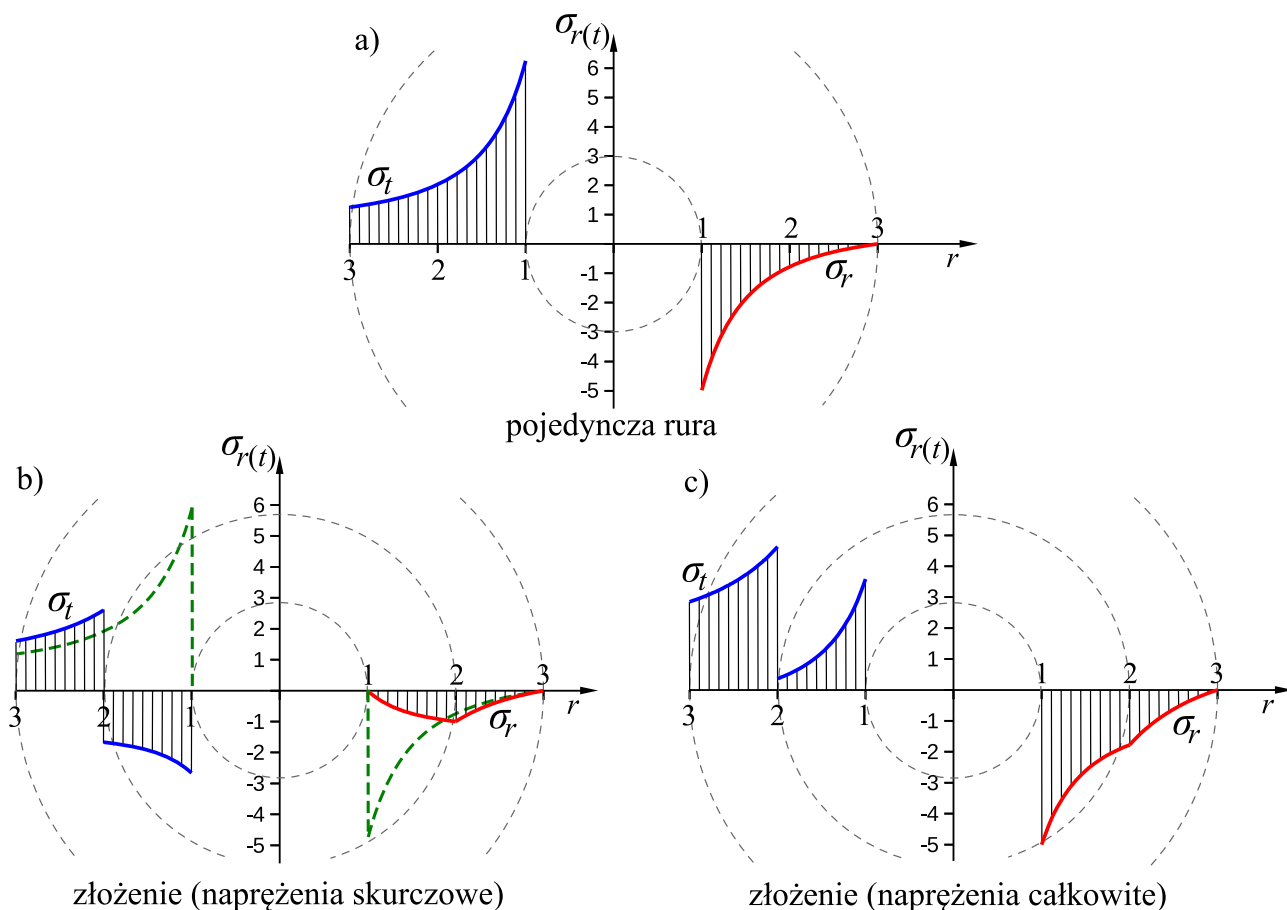
$$\sigma_t = \frac{1}{2}p \left(1 + \frac{9a^2}{r^2} \right)$$



Rys. 5. Przykład 2: przekrój cylindra jednowarstwowego a); dwuwarstwowego b)

Jak widać, przy obciążeniu cylindra tylko jednym ciśnieniem wzory znacząco się upraszczają. Ponieważ wykres naprężeń jest funkcją potęgową, a cylinder jest gruby, aby uzyskać gładki przebieg funkcji wyznaczmy jej wartości w pięciu punktach: $r_1 = a$, $r_2 = 1,5a$, $r_3 = 2a$, $r_4 = 2,5a$, $r_5 = 3a$. Uzyskane wartości naprężeń widoczne są na Rys. 6a. Skrajne wartości naprężeń promieniowych odpowiadają wartościom ciśnienia na poszczególnych ściankach. Naprężenia te w całym obszarze mają wartość ujemną.

Wykres naprężeń obwodowych wygląda podobnie, jednak w tym przypadku naprężenia są dodatnie na całym przekroju, a wartość na powierzchni swobodnej jest różna od zera. Największa wartość składowej naprężeń to $6p$ i są to naprężenia obwodowe na wewnętrznej ścianie.



Rys. 6. Rozkład naprężeń w cylindrze grubościennym: pojedyncza ścianka – obciążenie ciśnieniem wewnętrznym a); podwójna ścianka – obciążenie od połączenia skurczowego b); podwójna ścianka – obciążenie od połączenia skurczowego i ciśnieniem wewnętrznym c)

Rozpatrzmy teraz przypadek, gdy cylinder złożony jest z dwóch rur połączonych skurczowo. Mamy tu dwa obciążenia – obciążenie od połączenia skurczowego, działające na styku dwóch rur oraz obciążenie właściwe, działające wewnątrz cylindra. Rozwiązanie otrzymamy dzieląc zadanie na dwa podzadania. W pierwszym kroku wyznaczmy naprężenia wywołane tylko połączeniem skurczowym, w drugim tylko naprężenia wywołane ciśnieniem roboczym.

Chcąc zbadać naprężenia wywołane połączeniem skurczowym musimy rozpatrzeć oba fragmenty cylindra osobno, zgodnie z Rys. 7. Rura wewnętrzna będzie obciążona ciśnieniem zewnętrznym. Zgodnie z przyjętymi wcześniej oznaczeniami będziemy mieli: $a = a$, $b = 2a$, $p_a = 0$ i $p_b = p$. Podstawiając to do równań (7) otrzymamy

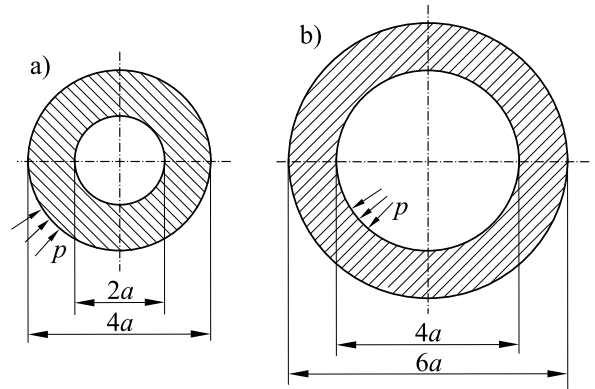
$$\sigma_r = -\frac{4}{3}p \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right)$$

$$\sigma_t = -\frac{4}{3}p \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right)$$

Naprężenia wyznaczymy dla trzech wartości promienia: $r_1 = a$, $r_2 = 1,5a$ oraz $r_3 = 2a$. Podobnie wyznaczamy naprężenia dla rury zewnętrznej, które jest obciążona ciśnieniem zewnętrznym. Mamy tu: $a = 2a$, $b = 3a$, $p_a = p$ i $p_b = 0$, a zależności na naprężenia przyjmują postać

$$\sigma_r = \frac{4}{5}p \left(1 - \frac{9a^2}{r^2} \right)$$

$$\sigma_t = \frac{4}{5}p \left(1 + \frac{9a^2}{r^2} \right)$$



Rys. 7. Obciążenie cylindra złożonego

Wartości naprężeń policzymy dla promieni: $r_3 = 2a$, $r_4 = 2,5a$ i $r_5 = 3a$. Rozkłady naprężeń widoczne są na Rys. 6b.

Naprężenia promieniowe osiągają wartość maksymalną równą p na styku dwóch rur, natomiast na powierzchniach swobodnych są równe zero. Rozkład naprężeń jest ciągły. W przypadku naprężeń obwodowych, na styku dwóch rur pojawia się nieciągłość, a naprężenia zmieniają znak.

Na tym samym wykresie przedstawiono, linią kreskową, rozkład naprężeń dla cylindra obciążonego tylko ciśnieniem roboczym. Jest on taki sam, jak rozkład dla cylindra wykonanego z jednej rury. Rozwiązanie polega na zsumowaniu wykresów otrzymanych dla obu składowych obciążenia, co przedstawiono na Rys. 6c.

Porównanie obu rozwiązań konstrukcyjnych polega na porównaniu wykresów z Rys. 6a i c. To, co udało się uzyskać projektując cylinder jako złożenie dwóch rur to przede wszystkim obniżenie maksymalnych naprężeń na wewnętrznej ścianie, które zmniejszyły się z $6p$ do $3,58p$. Jest to szczególnie ważne, gdy obciążenie przykładane jest w sposób dynamiczny. Obniżeniu uległy również maksymalne naprężenia obwodowe – z $6p$ do $4,63p$. Jest to istotne z tego względu, że są to naprężenia rozciągające, które mogą powodować rozerwanie cylindra. Dodatkową zaletą jest to, że rozkłady naprężeń są bardziej równomierne.

Krażki wirujące

Jednym z typowych elementów stosowanych w budowie maszyn jest kążek wirujący. Można do nich zakwalifikować koła zamachowe, koła przekładni pasowych, tarcze hamulcowe czy wirniki turbin.

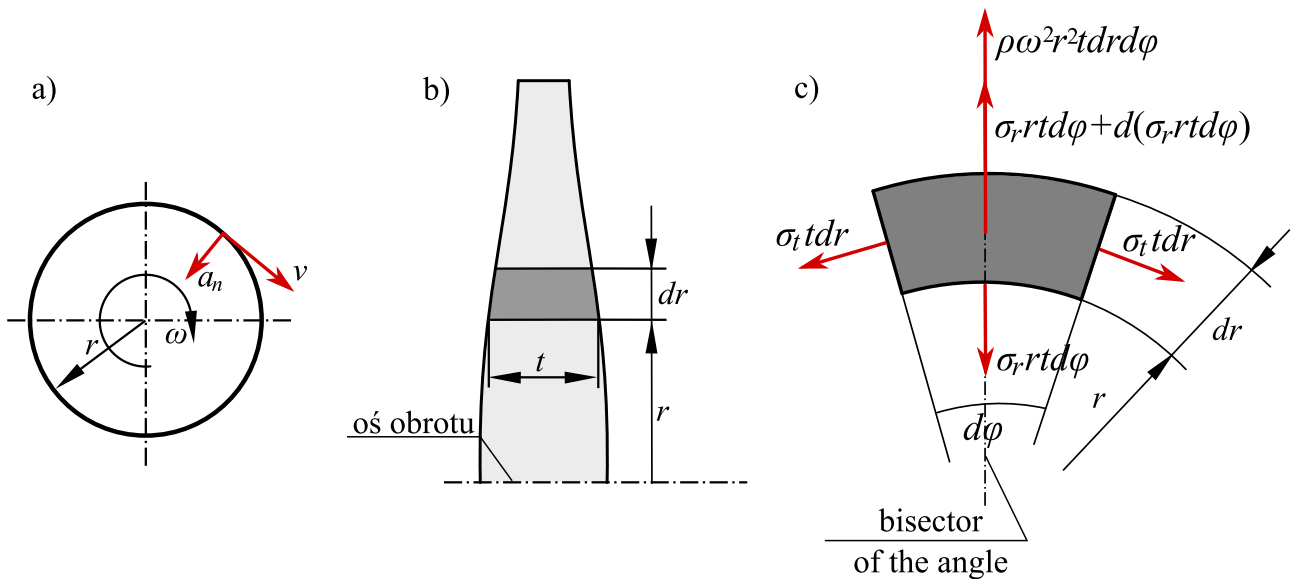
Wytrzymałość kążków wirujących analizuje się podobnie jak wytrzymałość rur grubościennych. Różnica polega na tym, że w tym przypadku kążek ma skończoną grubość, którą należy uwzględnić w analizie. Ponadto grubość ta może być zmienna wzdłuż promienia kążka. Największa różnica pojawia się w obciążeniu. W tym przypadku obciążeniem nie jest przyłożone ciśnienie, ale siła bezwładności obracającej się masy.

Przyjmujemy następujące założenia

- kążek wykonany jest z jednorodnego materiału podlegającego prawu Hooke'a,
- kążek jest osiowo-symetryczny, a płaszczyzna symetrii jest prostopadła do osi obrotu,
- grubość kążka jest stosunkowo mała.

Ponadto zakładamy, że stan naprężeń odpowiada płaskiemu stanowi naprężeń z dwoma składowymi, tj. promieniową σ_r oraz obwodową σ_t . Obie składowe są funkcją promienia r i prędkości kątowej ω .

Na elementarny wycinek abcd kążka będzie działało pięć sił. Cztery z nich będą to siły wynikające z naprężeń, które otrzymamy mnożąc naprężenia przez powierzchnię, na jakiej działają. Piąta siła to siła bezwładności F_b będąca efektem działania przyspieszenia dośrodkowego a_n . Siła ta będzie równa iloczynowi masy i przyspieszenia $F_b = ma_n$. Przyspieszenie dośrodkowe



Rys. 8. Kążek wirujący: a) obciążenie; b) przekrój poprzeczny; c) rozkład sił

definiujemy jako $A_n = \omega^2 r$. Natomiast masa jest iloczynem gęstości ρ i objętości elementarnego wycinka. Ponieważ wycinek jest mały, ma długość dr , można przyjąć, że na tym odcinku jego grubość jest stała. Przy niewielkich wymiarach wycinka można przyjąć, że jest on sześciannym, zatem objętość będzie równa $V = r d\phi dr t$. Zatem siła odśrodkowa

$$F_d = \rho \omega^2 r^2 t r d\phi dr$$

Analizę przeprowadzimy podobnie, jak w przypadku rury grubościenną. Równanie równowagi uzyskamy rzutując wszystkie siły na dwusieczną kąta $d\phi$, a dodatkowe informacje uzyskamy

z analizy deformacji krążka. Siły na ścianka boczny są sobie równe, natomiast siła na ścianie zewnętrznej jest większa od siły na ścianie wewnętrznej o nieskończenie mały przyrost. Zatem zgodnie z Rys. 8 mamy

$$-\sigma_r t r d\varphi + \sigma_r t r d\varphi + d(\sigma_r t r d\varphi) + \rho \omega^2 r^2 t d r d\varphi - \sigma_t t d r d\varphi = 0$$

Pierwsze dwa składniki zredukują się, a pozostała część po podzieleniu przez $d r d\varphi$ przyjmie postać

$$\frac{d}{d r}(\sigma_r t r) - \sigma_t t + \rho \omega^2 r^2 t = 0$$

Pierwszy składnik możemy rozpisać

$$\frac{d}{d r}(\sigma_r t r) = \frac{d}{d r}(\sigma_r t) r + \sigma_r t \frac{d r}{d r}$$

Podstawiając to z powrotem do poprzedniego równania i dzieląc wszystko przez t otrzymamy

$$\frac{r}{t} \frac{d}{d r}(\sigma_r t) + \sigma_r - \sigma_t + \rho \omega^2 r^2 = 0 \quad (8)$$

Otrzymaliśmy jedno równanie, w którym mamy dwie zmienne σ_r i σ_t . Obie zmienne, zgodnie z prawem Hooke'a możemy wyrazić poprzez odkształcenia, które są tutaj funkcją jednej zmiennej r . Analizę odkształceń przeprowadza się tak samo, jak w przypadku rur grubościennych. Zatem odkształcenia, promieniowe i obwodowe, w krążku wirującym definiujemy następująco

$$\varepsilon_r = \frac{d u}{d r} \quad \text{oraz} \quad \varepsilon_t = \frac{u}{r} \quad (9)$$

Dla płaskiego stanu naprężeń, prawo Hooke'a ma postać

$$\sigma_r = \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_r + \nu \varepsilon_t)$$

$$\sigma_t = \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_t + \nu \varepsilon_r)$$

a po podstawieniu odkształceń

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E}{1 - \nu^2} \left(\frac{d u}{d r} + \nu \frac{u}{r} \right) \\ \sigma_t &= \frac{E}{1 - \nu^2} \left(\frac{u}{r} + \nu \frac{d u}{d r} \right) \end{aligned} \quad (10)$$

Zanim podstawimy powyższe zależności do równania równowagi (8) wyznaczmy występującą w nim pochodną

$$\frac{d}{d r}(\sigma_r t) = t \frac{d \sigma_r}{d r} + \sigma_r \frac{d t}{d r} = t \frac{E}{1 - \nu^2} \left(\frac{d^2 u}{d r^2} + \frac{\nu}{r} \frac{d u}{d r} - \nu \frac{u}{r^2} \right) + \frac{d t}{d r} \frac{E}{1 - \nu^2} \left(\frac{u}{r} + \nu \frac{d u}{d r} \right)$$

Podstawiając powyższe, jak również zależności z prawa Hooke'a, do równania równowagi, porządkując i mnożąc przez $(E r)/(1 - \nu^2)$ otrzymamy

$$\frac{d^2 u}{d r^2} + \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{t} \frac{d t}{d r} \right) \frac{d u}{d r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\nu}{t} \frac{d t}{d r} - \frac{1}{r} \right) u = A r \quad (11)$$

gdzie A jest stałą opisującą materiał i ruch

$$A = -\frac{1 - nu^2}{E} \rho \omega^2$$

Otrzymane równanie (11) ma ogólny charakter i praktycznie jest rozwiązać je dla szczególnych przypadków. Jednym z nich jest przyjęcie, że grubość krążka t jest stała na całym promieniu. Otrzymane równanie będzie więc prawdziwe dla krążków o stałej grubości.

Jeśli założymy, że $t = \text{const.}$, pochodna dt/dr będzie równa zero. Równanie (11) przyjmie postać

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = Ar \quad (12)$$

Równanie to można zapisać w równoważnej formie

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (ur) \right] = Ar$$

Po dwukrotnym scałkowaniu i podzieleniu każdorazowo przez r otrzymamy

$$u = \frac{r^3}{8} A + \frac{r}{2} C_1 + \frac{1}{r} C_2 \quad (13)$$

Podstawiając wyznaczone równanie na przemieszczenie u do prawa Hooke'a otrzymamy wyrażenia na naprężenia

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E}{1 - \nu^2} \left(\frac{(3 + \nu)}{8} Ar^2 + \frac{1 + \nu}{2} C_1 - \frac{1 - \nu}{r^2} C_2 \right) \\ \sigma_t &= \frac{E}{1 - \nu^2} \left(\frac{(3 + \nu)}{8} Ar^2 + \frac{1 + \nu}{2} C_1 + \frac{1 - \nu}{r^2} C_2 \right) \end{aligned} \quad (14)$$

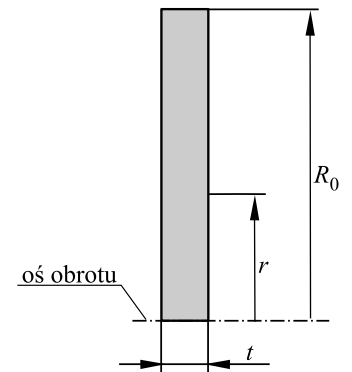
Przyjmujemy następujące warunki brzegowe, zgodnie z Rys. 9: dla $r = 0$ $u = 0$, co oznacza, że w osi krążka nie ma przemieszczeń oraz dla $r = R_0$ $\sigma_r = 0$; drugi warunek oznacza, że na zewnętrznej powierzchni krążka, powierzchni swobodnej, nie pojawiają się naprężenia. Z warunku pierwszego otrzymamy $C_2 = 0$, natomiast z warunku drugiego

$$C_1 = \frac{3 + \nu}{4(1 + \nu)} \frac{1 - \nu^2}{E} \rho \omega^2 R_0^2$$

. Podstawiając stałe do układu (14) otrzymamy wyrażenia na wyznaczanie składowych naprężeń

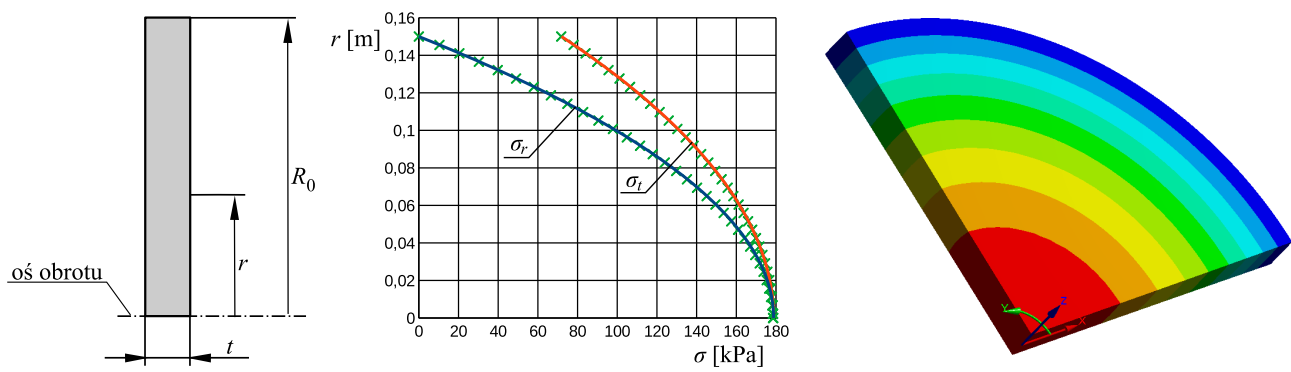
$$\sigma_r = \frac{3 + \nu}{8} \rho \omega^2 (R_0^2 - r^2) \quad (15)$$

$$\sigma_t = \frac{3 + \nu}{8} \rho \omega^2 \left(R_0^2 - \frac{1 + 3\nu}{3 + \nu} r^2 \right)$$



Rys. 9. Geometria krążka

Powyższe formuły pozwalają na wyznaczenie naprężeń wzdłuż promienia krążka. Ich wartości zależą od prędkości obrotowej i gęstości materiału. Nie zależą od grubości krążka. Przykładowe obliczenia przedstawiono na Rys. 10 dla krążka o średnicy 300 mm i grubości 20 mm wykonanego z aluminium. Krążek obracał się z prędkością 800 obr/min. Z wykresów widać, że w osi krążka oba naprężenia są sobie równe. Na powierzchni swobodnej naprężenia promieniowe są równe zero, a obwodowe są różne od zera. Dla porównania przedstawiono również rozwiązanie uzyskane metodą elementów skończonych. Maksymalna różnica wyniosła mniej niż 0,5%.



Rys. 10. Rozkład naprężeń w krążku wirującym