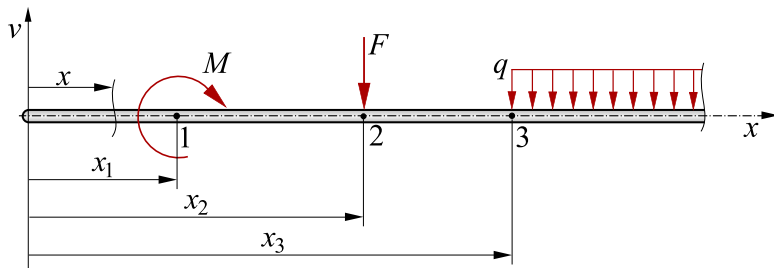


Linia ugięcia belki – metoda Clebscha

Wyznaczanie ugięcia belek wieloprzedziałowych w klasyczny sposób wymaga czasochłonnych obliczeń. Wynika to z faktu, że w każdym przedziale moment gnący opisany jest innym równaniem, a ilość stałych całkowania, które trzeba wyznaczyć rośnie wraz ze wzrostem przedziałów.

Znajdźmy zatem sposób na zapis równania momentu w taki sposób, aby jedno równanie było prawdziwe dla każdego przedziału, czyli dla całej długości belki. Zaczniemy od zapisania równań momentów dla każdego z przedziałów fragmentu belki przedstawionego na Rys. 1. Układ współrzędnych umieszczamy w lewym końcu belki. Przyjmujemy



Rys. 1: Fragment belki wieloprzedziałowej

następującą konwencję zapisu poszczególnych składników równania momentu – każdy ze składników będzie zawierał obciążenie oraz odległość tego obciążenia od rozpatrywanego przekroju. W przypadku siły będzie to $F(x - x_i)$, a w przypadku momentu $M(x - x_i)^0$, gdzie x_i jest początkiem rozpatrywanego przedziału, a x dowolnym punktem wewnątrz przedziału. Zasadność takiego zapisu momentu ujawni się w czasie całkowania równania.

Zapiszmy zatem równanie momentów dla poszczególnych przedziałów zdefiniowanych po prawej stronie układu (1)

$$M(x) = \begin{cases} 0 & (0 \leq x \leq x_1) \\ M(x - x_1)^0 & (x_1 \leq x \leq x_2) \\ M(x - x_1)^0 - F(x - x_2) & (x_2 \leq x \leq x_3) \\ M(x - x_1)^0 - F(x - x_2) - \frac{1}{2}q(x - x_3)^2 & (x_3 \leq x \leq \dots) \end{cases} \quad (1)$$

Z powyższego układu widać, że każde kolejne równanie zawiera składniki równania poprzedniego. Sprawdźmy zatem, czy ostatnie równanie, dla przedziału czwartego, jest prawdziwe np. dla przedziału drugiego. W przedziale drugim $x \leq x_2$. Oznacza to, że nawias przy pierwszym składniku będzie dodatni, a pozostałe nawiasy będą ujemne. Jeśli zatem założymy, że do równania wchodzi jedynie składniki z dodatnimi nawiasami, ostatnie równanie będzie prawdziwe dla drugiego przedziału jak również dla wszystkich pozostałych.

Przejdźmy do całkowania równania momentu. Wiemy, że pierwsze scałkowanie pozwala wyznaczyć kąt obrotu belki. Zakładając, że sztywność belki jest taka sama na całej długości, składnik EI jako stałą przenosimy na lewą stronę. Przyjmujemy następującą zasadę dla całkowania: każdy ze składników równania całkujemy bez rozwijania nawiasu; nawias traktujemy jak zmienną. Otrzymamy zatem

$$EI\theta(x) = \begin{cases} C_1 & (0 \leq x \leq x_1) \\ C_2 + M(x - x_1) & (x_1 \leq x \leq x_2) \\ C_3 + M(x - x_1) - \frac{1}{2}F(x - x_2)^2 & (x_2 \leq x \leq x_3) \\ C_4 + M(x - x_1) - \frac{1}{2}F(x - x_2)^2 - \frac{1}{6}q(x - x_3)^3 & (x_3 \leq x \leq \dots) \end{cases} \quad (2)$$

Są to cztery równania kąta obrotu, jedno dla każdego przedziału. Zauważmy, że na granicach przedziałów nie ma przegubów a belka zachowuje ciągłość. Wynika z tego, że kąt obrotu na granicy przedziałów x_i musi być taki sam licząc go od lewej $\theta(x_i)^-$ i od prawej $\theta(x_i)^+$ strony. Zapiszmy zatem warunek ciągłości kąta obrotu dla punktu pierwszego, czyli dla $x = x_1$.

Porównując pierwsze i drugie równanie otrzymamy

$$\theta(x_1)^- = \theta(x_1)^+ \rightarrow C_1 = C_2 + M(x_1 - x_1)$$

Widać, że nawias się wyzeruje i ostatecznie otrzymamy $C_1 = C_2$. Podobnie postępujemy dla pozostałych punktów

$$C_2 + M(x_2 - x_1) = C_3 + M(x_2 - x_1) - \frac{1}{2}F(x_2 - x_2)^2 \rightarrow C_2 = C_3$$

$$C_3 + M(x_3 - x_1) - \frac{1}{2}F(x_3 - x_2)^2 = C_4 + M(x_3 - x_1) - \frac{1}{2}(x_3 - x_2)^2 - \frac{1}{2}q(x_3 - x_3)^3 \rightarrow C_3 = C_4$$

Zatem wszystkie stałe całkowania są sobie równe $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = C$. Jeżeli przyjmiemy oznaczenie dla początku układu współrzędnych $\theta(0) = \theta_0$, to z pierwszego równania otrzymamy

$$C = EI\theta_0 \quad \text{lub} \quad \theta_0 = \frac{C}{EI} \quad (3)$$

Wynika z tego, że stała całkowania C opisuje kąt obrotu lewego końca belki. Zatem, jeśli lewy koniec belki jest utwierdzony możemy być pewni, że stała całkowania C będzie równa zero. Warto zauważyć, że jednostką stałej C jest $[\text{N}\cdot\text{mm}^2]$

Przejdźmy do drugiego całkowania, które pozwoli nam wyznaczyć ugięcie belki. Wiemy już, że pierwsza stała całkowania jest taka sama we wszystkich równaniach, zatem całkując układ (2) otrzymamy

$$EIv(x) = \begin{cases} D_1 + Cx & (0 \leq x \leq x_1) \\ D_2 + Cx + \frac{1}{2}M(x - x_1)^2 & (x_1 \leq x \leq x_2) \\ D_3 + Cx + \frac{1}{2}M(x - x_1)^2 - \frac{1}{6}F(x - x_2)^3 & (x_2 \leq x \leq x_3) \\ D_4 + Cx + \frac{1}{2}M(x - x_1)^2 - \frac{1}{6}F(x - x_2)^3 - \frac{1}{24}q(x - x_3)^4 & (x_3 \leq x \leq \dots) \end{cases} \quad (4)$$

Zakładając, że belka nie traci ciągłości, ugięcie na granicy przedziałów musi być takie samo licząc od lewej $v(x_i)^-$ i od prawej $v(x_i)^+$ strony. Zapiszmy zatem warunek ciągłości ugięcia ugięcia dla punktu pierwszego, czyli dla $x = x_1$. Porównując pierwsze i drugie równanie otrzymamy

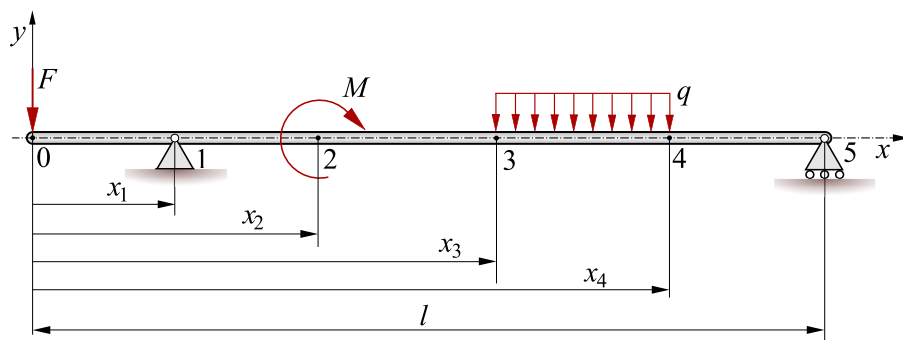
$$v(x_1)^- = v(x_1)^+ \rightarrow D_1 + Cx_1 = D_2 + Cx_1 + \frac{1}{2}M(x_1 - x_1)^2$$

Wynika stąd, że $D_1 = D_2$, a postępując tak dla pozostałych punktów charakterystycznych otrzymamy, że $D_1 = D_2 = D_3 = D_4 = D$. Jeżeli przyjmiemy oznaczenie dla początku układu współrzędnych $v(0) = v_0$, to z pierwszego równania otrzymamy

$$D = EIv_0 \quad \text{lub} \quad v_0 = \frac{D}{EI} \quad (5)$$

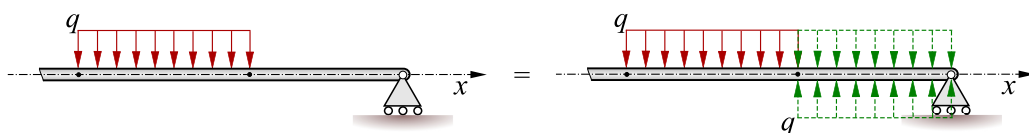
Wynika z tego, że stała całkowania D opisuje ugięcie lewego końca belki. Zatem, jeśli lewy koniec belki jest utwierdzony lub znajduje się tam podpora przegubowa możemy być pewni, że stała całkowania D będzie równa zero. Warto zauważyć, że jednostką stałej D jest $[\text{N}\cdot\text{mm}^3]$.

Spróbujmy, stosując przedstawione wyżej zasady, zapisać równanie momentu dla belki przedstawionej na Rys. 2. Belka ta ma pięć przedziałów. Jak ustaliliśmy analizując układ (1) ostatnie równanie jest prawdziwe dla wszystkich przedziałów, możemy więc przyjąć, że jest to



Rys. 2: Przykład belki wieloprzedziałowej

równanie momentu dla całej belki. Widzieliśmy też, że równanie dla kolejnych przedziałów zawierało składniki równania z przedziałów poprzednich. Oznacza to, że raz wpisane do równania obciążenie działa do końca belki. Analizując obciążenie belki z Rys. 2 widzimy, że obciążenie ciągłe q działa tylko w przedziale czwartym. Jeśli zostanie wpisane do równania momentu będzie to oznaczało, że działa ono również w przedziale piątym. Ponieważ tak nie jest, należy to obciążenie w przedziale piątym zniwelować. Robi się to w ten sposób, że wpisane w przedziale czwartym obciążenie q przedłuża się do końca belki i równoważy się je obciążeniem przeciwnym, jak przedstawiono na Rys. 3 Obciążenie q działające od dołu wpisuje się do równania momentu



Rys. 3: Równoważenie obciążenia ciągłego

w przedziale piątym. Stosując wszystkie przyjęte wyżej zasady, równanie momentu dla naszej belki będzie miało postać

$$M(x) = -F(x-0) + R_1(x-x_1) + M(x-x_2)^0 - \frac{1}{2}q(x-x_3)^2 + \frac{1}{2}q(x-x_4)^2 \quad (6)$$

Całkowanie powyższego równania pozwala wyznaczyć kąt obrotu i ugięcie belki ale również sporządzić wykres momentu gnącego i siły stycznej.

Przedstawiony powyżej sposób wyznaczania linii ugięcia belki nosi nazwę metody Clebscha (w języku angielskim *double integration method*). Stosując tę metodę postępujemy zgodnie z następującymi zasadami:

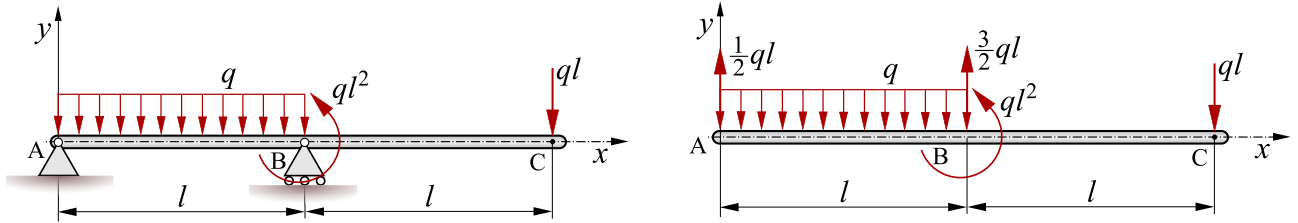
- układ współrzędnych umieszczamy w lewym końcu belki
- oznaczamy punkty charakterystyczne współrzędnymi $x_1, x_2, \dots$
- każde obciążenie ciągłe, kończące się przed końcem belki, przedłużamy do jej końca, przykładając jednocześnie obciążenie o przeciwnym zwrocie i tej samej wartości na odcinku w rzeczywistości nieobciążonym
- zapisujemy równanie momentu pamiętając, aby moment skupiony przyłożony w miejscu o współrzędnej x_i przemnożyć przez wyraz $(x-x_i)^0$
- całkujemy równanie pamiętając, aby wyrażenia typu $(x-x_i)^n$, gdzie x_i są współrzędnymi początków kolejnych przedziałów, całkować bez ich rozwijania, tzn.

$$\int (x-x_i)^n dx = \frac{(x-x_i)^{n+1}}{n+1} + C$$

Przykład 1

Dla belki przedstawionej na rysunku:

- zapisać równanie momentu gnącego $M(x)$,
- wyznaczyć przemieszczenie punktu C.



Rys. 4: Przykład 1

Z równań równowagi wyznaczamy reakcje w podporach

$$\sum M_A = 0 \rightarrow R_B = \frac{3}{2}ql$$

$$\sum M_B = 0 \rightarrow R_A = \frac{1}{2}ql$$

Zapisujemy równanie momentu. Ze względu na dużą liczbę obciążeń pojawiających się w każdym przedziale, poszczególne przedziały będziemy oddzielać pionową kreską z odpowiednim indeksem na dole.

$$M(x) = \frac{1}{2}ql(x) - \frac{1}{2}q(x)^2 \Big|_1 + \frac{3}{2}ql(x-l) - ql^2(x-l)^0 + \frac{1}{2}q(x-l)^2 \Big|_2$$

Podstawiamy równanie momentu do równania różniczkowego linii ugięcia belki i całkujemy dwukrotnie

$$EIv'' = M(x)$$

$$EI\theta(x) = C + \frac{1}{4}ql(x)^2 - \frac{1}{6}q(x)^3 \Big|_1 + \frac{3}{4}ql(x-l)^2 - ql^2(x-l) + \frac{1}{6}q(x-l)^3 \Big|_2$$

$$EIv(x) = D + Cx + \frac{1}{12}ql(x)^3 - \frac{1}{24}q(x)^4 \Big|_1 + \frac{3}{12}ql(x-l)^3 - \frac{1}{2}ql^2(x-l)^2 + \frac{1}{24}q(x-l)^4 \Big|_2$$

Dla analizowanej belki możemy zapisać dwa warunki brzegowe: pierwszy $v(0) = 0$ i drugi $v(l) = 0$. Pierwszy warunek brzegowy pozwala nam, z równania linii ugięcia, wyznaczyć stałą całkowania D. Po podstawieniu $x = 0$ i przyrównaniu do zera otrzymamy $D = 0$. Jest to zgodne z oczekiwaniami, ponieważ stała ta opisuje ugięcie na lewym końcu belki, a to jest równe zero ze względu na podporę.

Drugi warunek brzegowy pozwala, z tego samego równania, wyznaczyć stałą całkowania C. Zgodnie z wcześniejszymi ustaleniami otrzymamy tym samym kąt obrotu lewego końca belki, który opisany jest właśnie tą stałą. Po podstawieniu mamy

$$C = -\frac{ql^3}{24} \quad \text{oraz} \quad \theta_0 = -\frac{ql^3}{24EI}$$

Ujemna wartość oznacza, że punkt A obraca się przeciwnie do ruchu wskazówek zegara. Znając stałe całkowania możemy zapisać końcową postać równania linii ugięcia belki

$$v(x) = \frac{1}{EI} \left[-\frac{ql^3}{24}x + \frac{1}{12}ql(x-0)^3 - \frac{1}{24}q(x-0)^4 \right]_1 + \frac{1}{4}ql(x-l)^3 - \frac{1}{2}ql^2(x-l)^2 + \frac{1}{24}q(x-l)^4 \Big|_2$$

Ugięcie końca belki, czyli przemieszczenie punktu C, wyznaczamy podstawiając $x = 2l$. Mamy zatem

$$v(2l) = -\frac{7}{24} \frac{ql^4}{EI}$$

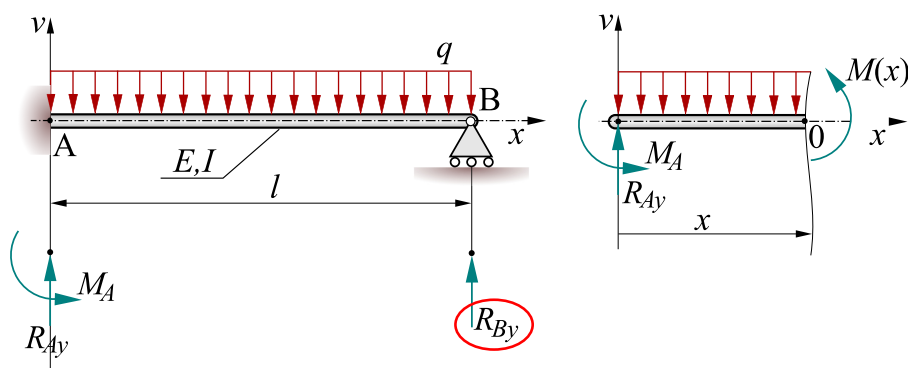
Wartość jest ujemna, co oznacza, że koniec belki obniża się – przemieszcza w kierunku przeciwnym do kierunku osi pionowej.

Metoda podwójnego całkowania, a w przypadku belek wieloprzedziałowych, metoda Clebscha, pozwala na obliczanie belek statycznie niewyznaczalnych. Jest to możliwe dlatego, że każda dodatkowa podpora, która wymaga wyznaczenia dodatkowych reakcji, pozwala również zapisać dodatkowe warunki brzegowe.

Przykład 2

Dla belki przedstawionej na Rys. 5 wyznaczyć

- reakcje w podporach,
- siły wewnętrzne w przekrojach,
- wykres kąta obrotu $\theta(x)$,
- linię ugięcia $v(x)$ wraz z punktami charakterystycznymi.



Rys. 5: Przykład 2

Rozpoczynamy od wyboru reakcji hiperstatycznej (nadmiarowej). Przyjmijmy, że jest to reakcja w podporze B. Pozostałe reakcje należy zapisać, jako funkcje reakcji hiperstatycznej. Z równań równowagi mamy

$$\sum M_A = 0 \rightarrow \frac{1}{2}ql^2 - R_B l - M_A = 0$$

$$\sum F_y = 0 \rightarrow R_A - ql + R_B = 0$$

a obie reakcje, jako funkcje R_B mają postać

$$M_A = \frac{1}{2}ql^2 - R_Bl \quad \text{oraz} \quad R_A = ql - R_B \quad (7)$$

Belka jest jednoprzędziowa. Równanie momentu otrzymane z równania równowagi dla odciętego fragmentu belki ma postać

$$M(x) = R_Ax - M_A - \frac{1}{2}qx^2 \quad (8)$$

a po podstawieniu otrzymanych wyżej wyrażeń na reakcje (7)

$$M(x) = qlx - R_Bx - \frac{1}{2}ql^2 + R_Bl - \frac{1}{2}qx^2$$

Zapiszmy zatem równanie różniczkowe linii ugięcia belki i scałkujmy je dwa razy

$$EIv''(x) = qlx - R_Bx - \frac{1}{2}ql^2 + R_Bl - \frac{1}{2}qx^2$$

$$EI\theta(x) = C + \frac{1}{2}qlx^2 - \frac{1}{2}R_Bx^2 - \frac{1}{2}ql^2x + R_Bl x - \frac{1}{6}qx^3$$

$$EIv(x) = D + Cx + \frac{1}{6}qlx^3 - \frac{1}{6}R_Bx^3 - \frac{1}{4}ql^2x^2 + \frac{1}{2}R_Bl x^2 - \frac{1}{24}qx^4$$

Dla rozważanej belki można zapisać trzy warunki brzegowe: $v(0) = 0$, $\theta(0) = 0$ i $v(l) = 0$. Z warunku drugiego mamy, że $C = 0$; z warunku pierwszego $D = 0$. Warunek trzeci pozwala wyznaczyć reakcję R_B . Mając reakcję hiperstatyczną można, z zapisanych wcześniej wyrażeń (7), wyznaczyć pozostałe reakcje. Ostatecznie wartości reakcji to:

$$R_B = \frac{3}{8}ql, \quad R_A = \frac{5}{8}ql \quad \text{oraz} \quad M_A = \frac{1}{8}ql^2$$

Zapiszmy równanie momentu (8) podstawiając do niego wyznaczone reakcje

$$M(x) = \frac{5}{8}qlx - \frac{1}{8}ql^2 - \frac{1}{2}qx^2$$

Pamiętając, że $T = dM/dx$ możemy wyznaczyć również równanie siły poprzecznej T

$$T(x) = \frac{5}{8}ql - qx$$

Powyższe równania pozwalają przygotować wykresy sił wewnętrznych. Należy wyznaczyć punkty charakterystyczne wykresów, czyli początek i koniec przedziału, oraz miejsca zerowe poprzez przyrównanie równań do zera. Poza tym należy wskazać maksimum momentu gnącego.

Oprócz wykresów sił wewnętrznych należy przygotować wykres kąta obrotu belki oraz linię ugięcia. Aby to zrobić należy wrócić do scałkowanych równań i podstawić do nich wartość reakcji R_B .

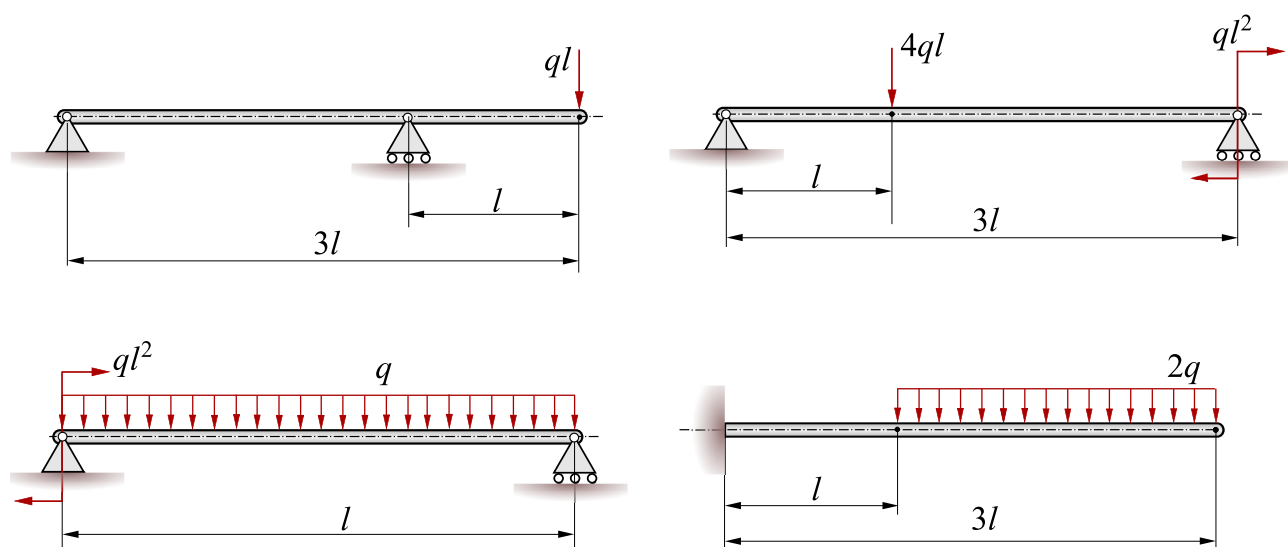
(proponuję wykonać wykresy i przeanalizować je; znaleźć zależności między kształtem poszczególnych krzywych; którego rzędu są krzywe?; co się dzieje na wykresie ugięcia dla $M(x)=0$?)

Zadania do samodzielnego rozwiązania

Dla przedstawionych poniżej przykładów belek

- narysować wykresy sił wewnętrznych,
- narysować wykresy kąta obrotu i ugięcia,
- wyznaczyć kąt obrotu i ugięcie w punktach charakterystycznych.

Zadane są: parametr obciążenia q , parametr długości l oraz sztywność belki EI .



Rys. 6: Przykłady do samodzielnego rozwiązania