

Analiza Wytrzymałościowa Konstrukcji Mechanicznych

Zagadnienia osiowo-symetryczne Rury grubościennie i krążki wirujące

dr hab. inż. Paweł JASION

e-mail: `pawel.jasion@put.poznan.pl`

www: `pawel.jasion.pracownik.put.poznan.pl`

Politechnika Poznańska
Instytut Mechaniki Stosowanej
Zakład Wytrzymałości Materiałów i Konstrukcji

Plan wykładu

1 Cylindry grubościennie

2 Krążki wirujące

Zastosowanie

Typowym zastosowaniem dla cylindrów grubościennych są

- zbiorniki ciśnieniowe
- siłowniki hydrauliczne
- lufy dział
- rury do transportu gorących cieczy
- połączenia wciskowe i skurczowe



Założenia do analizy naprężeń

Cylindry grubościennie są zwykle obciążone osiowo-symetrycznie poprzez

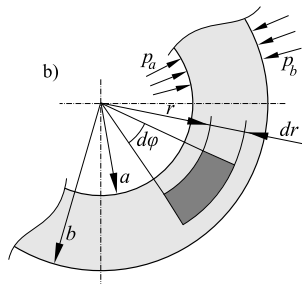
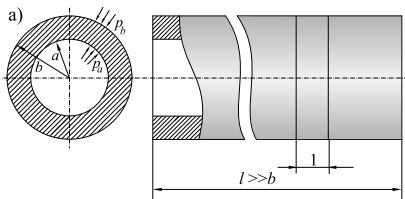
- zewnętrzne bądź wewnętrzne ciśnienie (lub oba jednocześnie)
- wysoką temperaturę

Jeśli cylinder nie jest otwarty, długi a naprężenia analizowane są z dala od punktu podparcia, prawdziwe są następujące założenia:

- odkształcenia są symetryczne względem osi obrotu i nie zmieniają się na długości cylindra
- z powodu symetrii nie występują siły styczne
- przekrój poprzeczny pozostaje płaski po przyłożeniu obciążenia

Geometria cylindra grubościennego

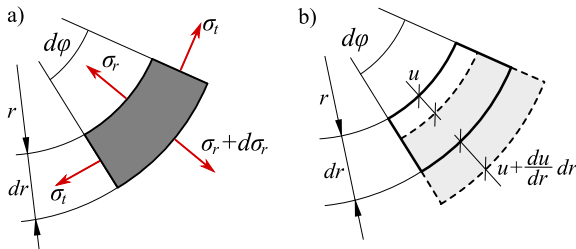
- promień cylindra
 - wewnętrzny a
 - zewnętrzny b
- ciśnienie obciążające
 - wewnętrzne p_a
 - zewnętrzne p_b



Wyznaczanie składowych naprężeń

Zagadnienie Lamé'go

- analizując równowagę wycinka cylindra otrzymuje się tylko jedno równanie równowagi, zawierające dwie nieznane funkcje:
 - naprężenia promieniowe σ_r
 - naprężenia obwodowe σ_t
- aby otrzymać dodatkowe równanie, należy rozważyć odkształcenia wycinka



Wyznaczanie składowych naprężeń

Zagadnienie Lamé'go

- z równania równowagi otrzymujemy

$$\sigma_r - \sigma_t + \frac{d\sigma_r}{dr}r = 0$$

- analiza deformacji daje

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr} \quad \text{and} \quad \varepsilon_t = \frac{u}{r}$$

- wszystkie powyższe wielkości są związane prawem Hooke'a

$$\sigma_r = \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_r + \nu\varepsilon_t)$$

$$\sigma_t = \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_t + \nu\varepsilon_r)$$

Wyznaczanie składowych naprężeń

Zagadnienie Lamé'go

- w ten sposób obie składowe stanu naprężeń zostały zapisane jako funkcje przemieszczenia u

$$\sigma_r = \frac{E}{1 - \nu^2} \left(\frac{du}{dr} + \nu \frac{u}{r} \right)$$

$$\sigma_t = \frac{E}{1 - \nu^2} \left(\frac{u}{r} + \nu \frac{du}{dr} \right)$$

- podstawiają powyższe do równania równowagi otrzymamy równanie różniczkowe z jedną zmienną, którą jest przemieszczenie u

Wyznaczanie składowych naprężeń

Zagadnienie Lamé'go

Ostatecznie otrzymuje się równanie różniczkowe w postaci

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = 0$$

którego rozwiązanie ma postać

$$u = C_1 r - \frac{C_2}{r}$$

Stałe C_1 i C_2 można wyznaczyć z warunków brzegowych na wewnętrznej i zewnętrznej powierzchni cylindra.

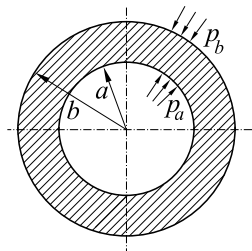
Wyznaczanie składowych naprężeń

Zagadnienie Lamé'go

Postać ogólna składowych naprężeń, niezależna od warunków brzegowych

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2} \left[c_1(1+\nu) - c_2 \frac{1-\nu}{r^2} \right]$$

$$\sigma_t = \frac{E}{1-\nu^2} \left[c_1(1+\nu) + c_2 \frac{1-\nu}{r^2} \right]$$



Możliwe warunki brzegowe:

- dla $r = b \rightarrow \sigma_r = p_b$ i dla $r = a \rightarrow \sigma_r = p_a$
- dla $r = b \rightarrow \sigma_r = p_b$ i dla $r = a \rightarrow \sigma_r = 0$
- dla $r = b \rightarrow \sigma_r = 0$ i dla $r = a \rightarrow \sigma_r = p_a$

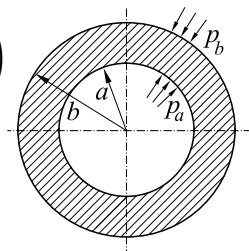
Wyznaczanie składowych naprężeń

Zagadnienie Lamé'go

Dla przypadku, gdy działa zarówno ciśnienie wewnętrzne jak i zewnętrzne, składowe naprężeń wyrażają się następująco

$$\sigma_r = \frac{p_a a^2}{b^2 - a^2} \left(1 - \frac{b^2}{r^2} \right) - \frac{p_b b^2}{b^2 - a^2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right)$$

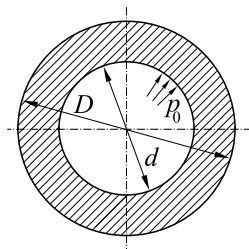
$$\sigma_t = \frac{p_a a^2}{b^2 - a^2} \left(1 + \frac{b^2}{r^2} \right) - \frac{p_b b^2}{b^2 - a^2} \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right)$$



Zastosowanie zagadnienia Lamé'go

Przykład 1

Wyznaczyć rozkład naprężeń w grubościennym cylindrze hydraulicznym, dla którego maksymalne ciśnienie robocze ma wartość $p_0 = 20$ MPa. Średnica wewnętrzna $d = 40$ mm i średnica zewnętrzna $D = 50$ mm. Cylinder wykonany jest ze stali nierdzewnej, dla której moduł Younga $E = 200000$ MPa.

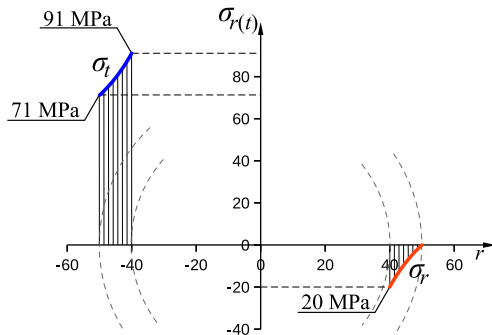


Zastosowanie zagadnienia Lamé'go

Przykład 1

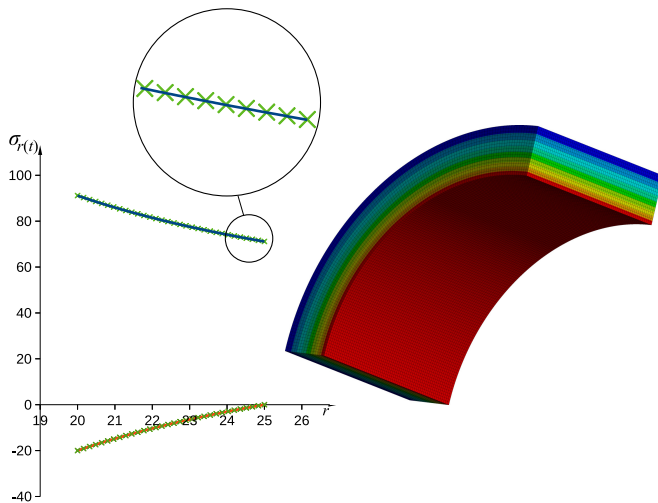
$$\sigma_r = \frac{p_a a^2}{b^2 - a^2} \left(1 - \frac{b^2}{r^2} \right)$$

$$\sigma_t = \frac{p_a a^2}{b^2 - a^2} \left(1 + \frac{b^2}{r^2} \right)$$



Zastosowanie zagadnienia Lamé'go

Przykład 1 – rozwiązanie MES



Zastosowanie zagadnienia Lamé'go

Analiza równania

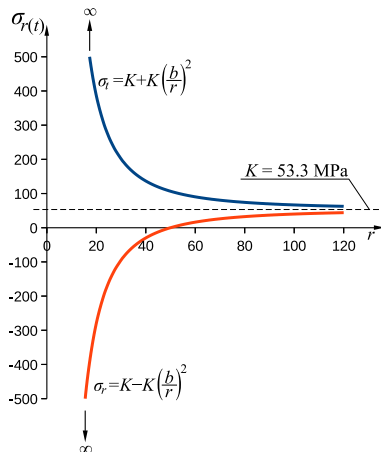
- dla obciążenia ciśnieniem wewnętrznym można zapisać

$$\sigma_r = K - K \left(\frac{b}{r} \right)^2$$

$$\sigma_t = K + K \left(\frac{b}{r} \right)^2$$

gdzie

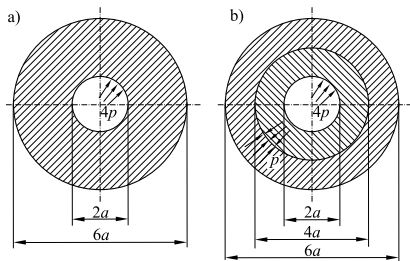
$$K = \frac{p_a a^2}{b^2 - a^2}$$



Zastosowanie zagadnienia Lamé'go

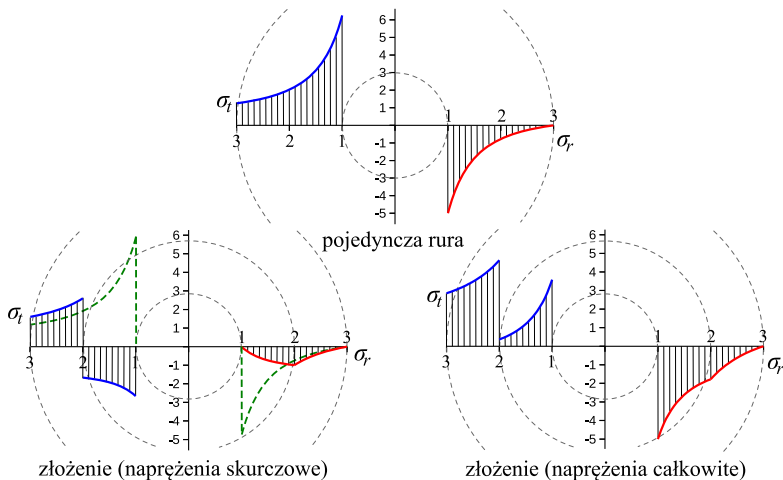
Przykład 2

Porównać rozkłady naprężeń w dwóch wariantach cylindra grubościennego obciążonego ciśnieniem wewnętrznym $4p$. Pierwszy wariant (Fig. a) wykonany jest jako pojedyncza rura. Drugi wariant (Fig. b) składa się z dwóch rur połączonych skurczowo. Zakłada się, że ciśnienie pomiędzy rurami w wyniku połączenia skurczowego wynosi p .



Zastosowanie zagadnienia Lamé'go

Przykład 2 – rozwiązanie



Plan wykładu

1 Cylindry grubościennie

2 Krażki wirujące

Zastosowania

Typowe zastosowania krążków wirujących to:

- koła zamachowe
- tarcze hamulcowe
- koła pasowe
- wirniki turbin



Założenia do analizy naprężeń

Naprężenia w krążkach wirujących analizuje się podobnie jak w rurach grubościennych. Różnicą jest to, że:

- dysk ma skończoną grubość, którą należy wziąć pod uwagę w czasie analizy
- grubość ta może być zmienna z promieniem dysku
- obciążenie jest generowane przez siły odśrodkowe związane z wirującą masą

Założenia do analizy naprężeń

Przyjmujemy następujące założenia:

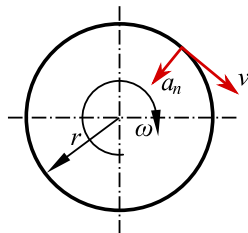
- dysk wykonany jest z jednorodnego materiału podlegającemu prawu Hooke'a,
- dysk jest osiowo symetryczny, a płaszczyzna symetrii jest prostopadła do osi obrotu,
- grubość dysku jest względnie mała.

Ponadto założymy, że dysk jest w dwuosowym stanie naprężeń, którego składowe to obciążenia promieniowe σ_r i naprężenia obwodowe σ_t . Obie składowe są funkcjami promienia r i prędkości kątowej ω .

Założenia do analizy naprężeń

Przyjmujemy następujące parametry:

- promień dysku r
- prędkość kątowna ω
- przyspieszenie odśrodkowe a_n

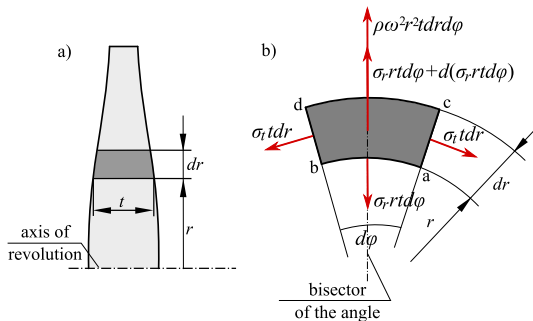


Są one ze sobą powiązane następującą zależnością:

$$a_n = \omega^2 r.$$

Równowaga elementarnego wycinka dysku

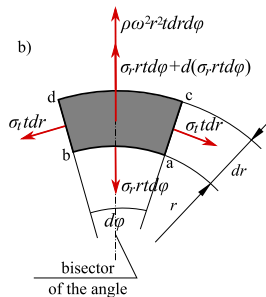
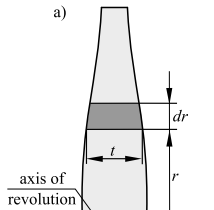
- analizę przeprowadzimy dla nieskończenie małego wycinka o grubości dr wyciętego z dysku w odległości r od osi obrotu; wycinek jest ograniczony kątem $d\varphi$
- na ścianki elementu działają cztery siły wynikające z naprężeń



Równowaga elementarnego wycinka dysku

- dodatkowo na element działa siła bezwładności F_b , która wynika z przyspieszenia odśrodkowego i masy $F_b = ma_n$
- przyspieszenie jest zdefiniowane jako $a_n = \omega^2 r$
- masa jest iloczynem gęstości materiału ρ i objętości elementu V i zdefiniowana jako $V = r d\varphi dr t$
- zatem siła odśrodkowa wynosi

$$F_d = \rho \omega^2 r^2 t dr d\varphi$$



Równowaga elementarnego wycinka dysku

- równanie równowagi otrzymamy poprzez zsumowanie rzutów wszystkich sił na dwusieczną kąta $d\varphi$
- po uporządkowaniu i podzieleniu przez $drd\varphi$ równanie przyjmie następującą formę

$$\frac{d}{dr}(\sigma_r t r) - \sigma_t t + \rho \omega^2 r^2 t = 0$$

- przerwszy składnik można zapisać jako

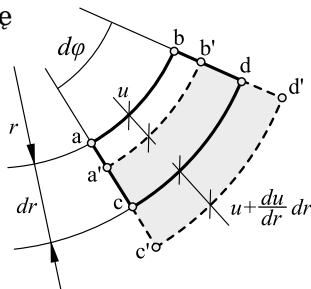
$$\frac{d}{dr}(\sigma_r t r) = \frac{d}{dr}(\sigma_r t) r + \sigma_r t \frac{dr}{dr}$$

- podstawiają powyższe do poprzedniego równania i dzieląc wszystko przez t otrzymamy

$$\frac{r}{t} \frac{d}{dr}(\sigma_r t) + \sigma_r - \sigma_t + \rho \omega^2 r^2 = 0$$

Deformacja elementarnego wycinka dysku

- analizując równowagę elementarnego wycinka dysku, otrzymaliśmy tylko jedno równanie równowagi zawierające dwie nieznane funkcje:
 - naprężenia promieniowe σ_r
 - naprężenia obwodowe σ_t
- aby otrzymać dodatkowe równanie, należy przeanalizować deformację elementu



Prawo Hooke'a

- analiza deformacji pozwala zdefiniować odkształcenia

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr} \quad \text{and} \quad \varepsilon_t = \frac{u}{r}$$

- naprężenia i odkształcenia są powiązane prawem Hooke'a

$$\sigma_r = \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_r + \nu \varepsilon_t)$$

$$\sigma_t = \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_t + \nu \varepsilon_r)$$

Prawo Hooke'a

- w ten sposób obie składowe naprężeń można zapisać jako funkcje przemieszczenia u

$$\sigma_r = \frac{E}{1 - \nu^2} \left(\frac{du}{dr} + \nu \frac{u}{r} \right)$$

$$\sigma_t = \frac{E}{1 - \nu^2} \left(\frac{u}{r} + \nu \frac{du}{dr} \right)$$

- podstawiając powyższe do równania równowagi otrzymujemy równanie różniczkowe z jedną zmienną u

Równanie równowagi

- równanie równowagi przyjmuje ostatecznie postać

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{t} \frac{dt}{dr} \right) \frac{du}{dr} + \frac{1}{r} \left(\frac{\nu}{t} \frac{dt}{dr} - \frac{1}{r} \right) u = Ar$$

gdzie A jest stałą opisującą materiał i ruch

$$A = -\frac{1 - \nu^2}{E} \rho \omega^2$$

- ponieważ otrzymane równanie ma postać ogólną, wygodnie jest rozwiązać je dla wybranego przypadku.

Dysk pełny o stałej grubości

- jednym z możliwych rozwiązań równania jest takie, dla którego grubość dysku t jest stała wzdłuż całego promienia
- jeśli założy się, że $t = \text{const.}$ wtedy pochodna dt/dr będzie równa zero; równanie przyjmie postać

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = Ar$$

lub

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (ur) \right] = Ar$$

Dysk pełny o stałej grubości

- rozwiązanie ma postać

$$u = \frac{r^3}{8}A + \frac{r}{2}C_1 + \frac{1}{r}C_2$$

- a składowe naprężeń

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{(3+\nu)}{8}Ar^2 + \frac{1+\nu}{2}C_1 - \frac{1-\nu}{r^2}C_2 \right)$$

$$\sigma_t = \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{(3+\nu)}{8}Ar^2 + \frac{1+\nu}{2}C_1 + \frac{1-\nu}{r^2}C_2 \right)$$

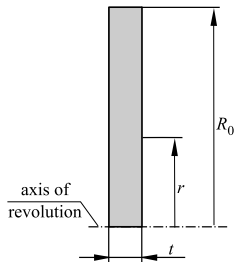
Dysk pełny o stałej grubości

Przyjęto następujące warunki brzegowe

- dla $r = 0$ $u = 0$ co oznacza, że oś dysku nie przemieszcza się
- dla $r = R_0$ $\sigma_r = 0$ co oznacza, że zewnętrzna powierzchnia dysku jest wolna od naprężeń promieniowych

Stałe przyjmują postać

- $C_2 = 0$
- $C_1 = \frac{3 + \nu}{4(1 + \nu)} \frac{1 - \nu^2}{E} \rho \omega^2 R_0^2$



Dysk pełny o stałej grubości

Składowe naprężeń przyjmują postać

$$\sigma_r = \frac{3 + \nu}{8} \rho \omega^2 (R_0^2 - r^2)$$

$$\sigma_t = \frac{3 + \nu}{8} \rho \omega^2 \left(R_0^2 - \frac{1 + 3\nu}{3 + \nu} r^2 \right)$$

Powyższe równania pozwalają wyznaczyć wartości składowych naprężeń wzdłuż promienia dysku. Wartości te zależą od prędkości obrotowej oraz gęstości materiału. Nie zależą od grubości dysku.

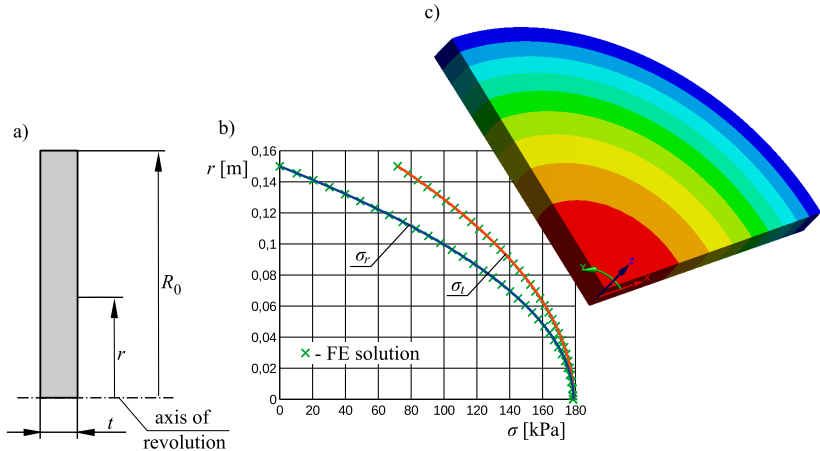
Dysk pełny o stałej grubości

Przykład 1

Wyznaczyć naprężenia promieniowe i obwodowe dla aluminiowego dysku o średnicy 300 mm i grubości równej 20 mm. Dysk obraca się z prędkością 800 obr/min.

Dysk pełny o stałej grubości

Przykład 1 – rozwiązanie



Dysk pełny o stałej wytrzymałości

- inne praktyczne rozwiązanie równania równowagi można otrzymać, jeśli założy się, że $\sigma_r = \sigma_t = \sigma = \text{const.}$
- w ten sposób otrzymuje się dysk o stałej wytrzymałości – w każdym punkcie dysku obie składowe naprężeń mają taką samą wartość.
- równanie równowagi ma postać

$$\frac{r}{t} \frac{d}{dr} (\sigma_r t) + \sigma_r - \sigma_t + \rho \omega^2 r^2 = 0$$

- zakładają równe naprężenia mamy

$$\sigma \frac{r}{t} \frac{dt}{dr} + \rho \omega^2 r^2 = 0$$

Dysk pełny o stałej wytrzymałości

- rozwiązanie tego równania dla t daje

$$t = Ce^{-\frac{\rho\omega^2 r^2}{2\sigma}}$$

- stała C może zostać wyznaczona z warunków brzegowych
- założmy, że grubość dysku w osi obrotu będzie miała grubość t_0
- warunek brzegowy ma zatem postać: dla $r = 0$ $t = t_0$
- z powyższego równania otrzymamy $C = t_0$, a wyrażenie na grubość dysku przyjmie postać

$$t = t_0 e^{-\frac{\rho\omega^2 r^2}{2\sigma}}$$

Dysk pełny o stałej wytrzymałości

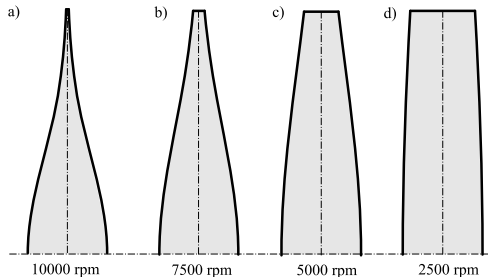
Przykład 1

Wyznaczyć kształt dysku pełnego o średnicy 300 mm wykonanego z aluminium, który w osi ma grubość równą 20 mm. Przyjąć, że obie składowe naprężenia mają wartość równą 10 MPa. Wykonać obliczenia dla czterech różnych prędkości obrotowych: 2500, 5000, 7500 and 10000 obr/min.

Dysk pełny o stałej wytrzymałości

Przykład 1 – rozwiązanie

Przekroje poprzeczne dysków o stałej wytrzymałości dla różnych prędkości obrotowych



Dysk pełny o stałej wytrzymałości

Przykład 1 – rozwiązanie

rozwiązanie MES dla 10000 obr/min

