

Wytrzymałość Materiałów II

Zginanie Napężenia normalne w belce zginanej

opracował:

dr hab. inż. Paweł JASION

e-mail: `pawel.jasion@put.poznan.pl`

www: `pawel.jasion.pracownik.put.poznan.pl`

Politechnika Poznańska
Instytut Mechaniki Stosowanej
Zakład Wytrzymałości Materiałów i Konstrukcji

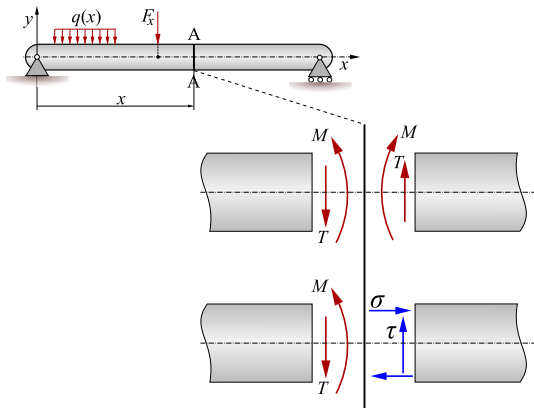
- 1 Naprężenia w belce zginanej
 - Podstawowe pojęcia i założenia
 - Naprężenia normalne w belce
 - Projektowanie belek – warunek wytrzymałościowy
 - Spiętrzenia naprężeń przy zginaniu

Plan wykładu

- 1 **Naprężenia w belce zginanej**
 - **Podstawowe pojęcia i założenia**
 - Naprężenia normalne w belce
 - Projektowanie belek – warunek wytrzymałościowy
 - Spiętrzenia naprężeń przy zginaniu

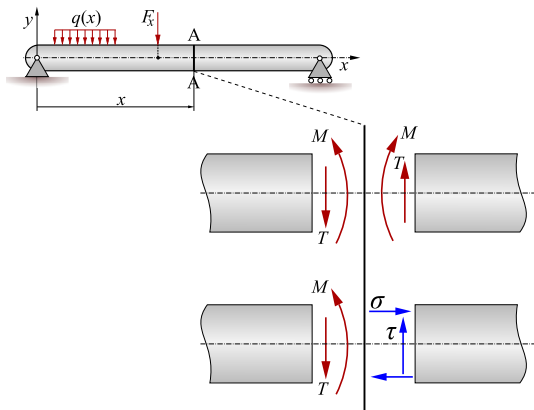
Naprężenia jako funkcje sił wewnętrznych

- siły wewnętrzne w belce równoważone są naprężeniami



Naprężenia jako funkcje sił wewnętrznych

- analizując stan równowagi można wykazać, że moment równoważony jest przez naprężenia normalne, a siła poprzeczna przez naprężenia styczne

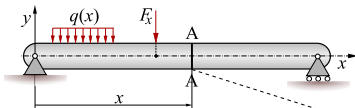


$$\sigma = f(M)$$

$$\tau = f(T)$$

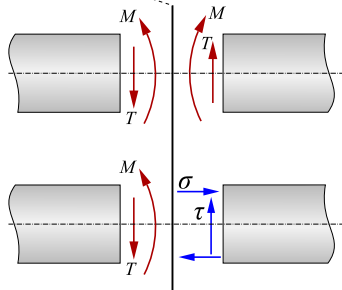
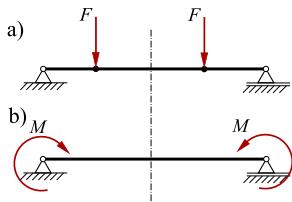
Naprężenia jako funkcje sił wewnętrznych

- pozwala to analizować oddzielnie oba rodzaje naprężeń



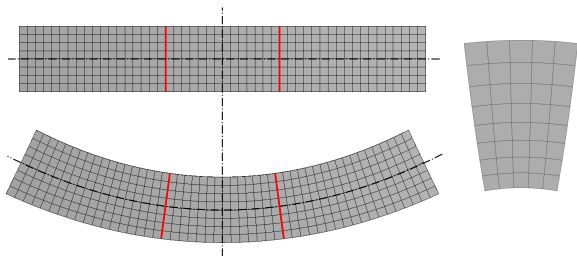
$$\sigma = f(M)$$

$$\tau = f(T)$$



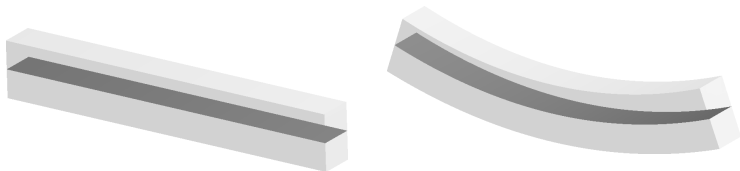
Obserwacje z eksperymentu

- linie prostopadłe do osi obracają się i pozostają proste
- górne włókna skracają się, a dolne wydłużają
- szerokość belki w strefie ściskanej zwiększa się, a w strefie rozciąganej zmniejsza



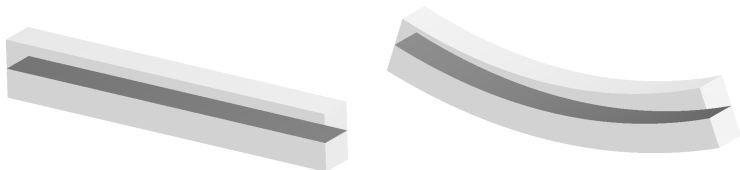
Wnioski z eksperymentu

- mamy do czynienia ze **zginaniem płaskim**; oś belki po odkształceniu pozostaje w płaszczyźnie symetrii
- ponieważ proste prostopadłe do osi przed odkształceniem pozostają takie po odkształceniu, to samo dotyczy całego przekroju poprzecznego
- deformacja włókna nie zależy od jego położenia na szerokości belki



Wnioski z eksperymentu

- ponieważ górne włókna są ściskane a dolne rozciągane, istnieje linia, której długość się nie zmienia
- włókna niepodlegające odkształceniom **tworzą płaszczyznę obojętną**, która w przecięciu z płaszczyzną symetrii tworzy **oś obojętną**
- obroty przekroji następują wokół osi obojętnej
- deformacja belki jest zgodna ze współczynnikiem Poisson'a



Założenia do wyprowadzenia zależności dla naprężeń

Hipoteza o nieoddziaływaniu włókien

włókna belki, równoległe do jej osi, podlegają rozciąganiu lub ścisłaniu w kierunku wzdłużnym i nie oddziałują na siebie w kierunku poprzecznym

Hipoteza płaskich przekroji

każdy poprzeczny przekrój belki, płaski przed deformacją, pozostaje płaski i prostopadły do odkształconej osi po deformacji

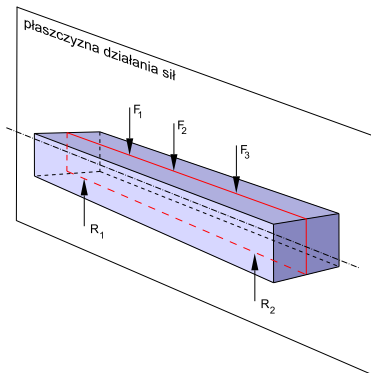
Założenia do wyprowadzenia zależności dla naprężeń

Ponadto:

- deformacja włókien równo oddalonych od osi obojętnej jest taka sama na całej szerokości przekroju
- belka ma płaszczyznę symetrii, w której znajdują się wszystkie obciążenia, i w której następuje deformacja
- materiał podlega prawu Hooke'a, a moduły sprężystości wzdłużnej są takie same dla rozciągania i ściskania
- proporcje wymiarów są takie, że belka pozostaje w stanie czystego zginania

Zginanie płaskie

- w zginaniu płaskim wszystkie siły, czynne i bierne, działają w tej samej płaszczyźnie
- w tej samej płaszczyźnie zachodzi zginanie belki



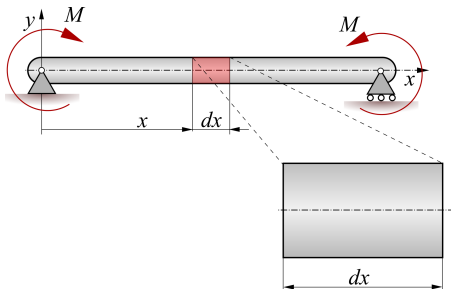
Plan wykładu

- 1 **Naprężenia w belce zginanej**
 - Podstawowe pojęcia i założenia
 - **Naprężenia normalne w belce**
 - Projektowanie belek – warunek wytrzymałościowy
 - Spiętrzenia naprężeń przy zginaniu

Odkształcenia liniowe w belce zginanej

- odkształcenie liniowe definiuje się jako stosunek zmiany długości elementu do jego długości początkowej

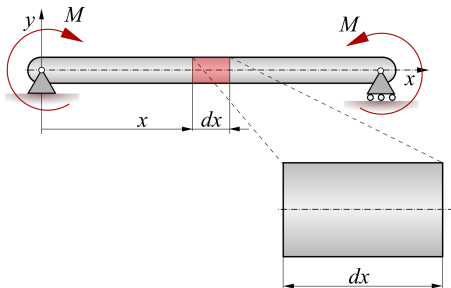
$$\varepsilon = \frac{\Delta dx}{dx}$$



Odkształcenia liniowe w belce zginanej

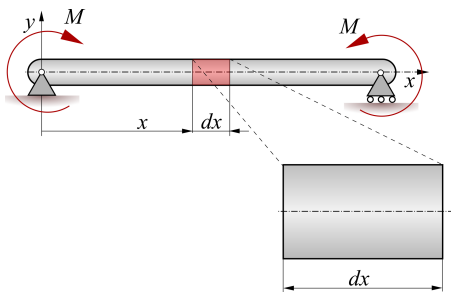
- analizując zmianę długości włókna belki otrzymuje się poniższą zależność

$$\varepsilon = \frac{\Delta dx}{dx} \rightarrow \varepsilon = \frac{y}{\rho}$$

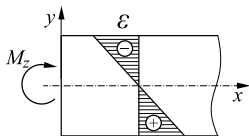


Odkształcenia liniowe w belce zginanej

- odkształcenia zależą zatem liniowo od współrzędnej y ; określa się je jako ujemne, gdy powodują skracanie włókien materiału



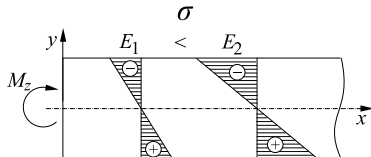
$$\varepsilon = \frac{\Delta dx}{dx} \rightarrow \varepsilon = \frac{y}{\rho}$$



Naprężenia normalne w belce zginanej

- zgodnie z przyjętymi założeniami materiał jest liniowo-sprężysty, a jego sztywność jest taka sama przy rozciąganiu i ściskaniu
- korzystając z wyrażenia na odkształcenia, możemy zapisać

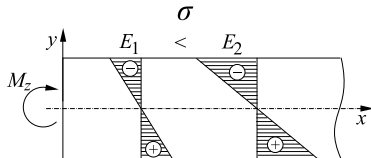
$$\sigma = E\varepsilon = E\frac{y}{\rho}$$



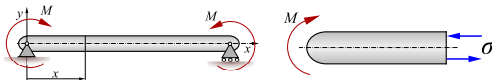
Naprężenia normalne w belce zginanej

- zgodnie z przyjętymi założeniami materiał jest liniowo-sprężysty, a jego sztywność jest taka sama przy rozciąganiu i ściskaniu
- korzystając z wyrażenia na odkształcenia, możemy zapisać

$$\sigma = E\varepsilon = E\frac{y}{\rho}$$



- wartość naprężeń można wyznaczyć analizując równowagę odciętego fragmentu belki



Naprężenia normalne w belce zginanej

- z równania równowagi sumy rzutów sił na oś x otrzymamy

$$\sum F_x = 0 \rightarrow \int_A \sigma dA = 0 \rightarrow \frac{E}{\rho} \int_A y dA = 0$$

- ponieważ wielkości przed całką są stałymi różnymi od zera, równanie jest spełnione tylko, gdy $y = 0$; zatem całka musi być równa zero
- całka powyższa to moment statyczny przekroju, który jest zerowy, jeśli oś pozioma przekroju przechodzi przez jego środek ciężkości
- dowodzi to, że oś obojętna belki, dla której $\sigma = 0$, przechodzi przez środek ciężkości przekroju

Naprężenia normalne w belce zginanej

- z równania równowagi sumy momentów względem osi z otrzymamy

$$\sum M_z = 0 \rightarrow \int_A \sigma y dA = M \rightarrow \frac{E}{\rho} \int_A y^2 dA = M$$

- całka powyższa jest osiowym momentem bezwładności I_z ; możemy zatem zapisać

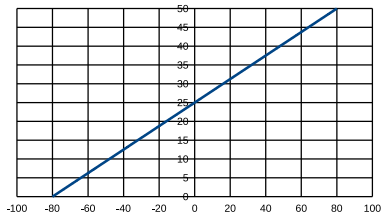
$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI_z}$$

- porównując to z wyrażeniem otrzymanym z analizy odkształceń otrzymamy formułę na wyznaczanie naprężeń normalnych w przekroju belki

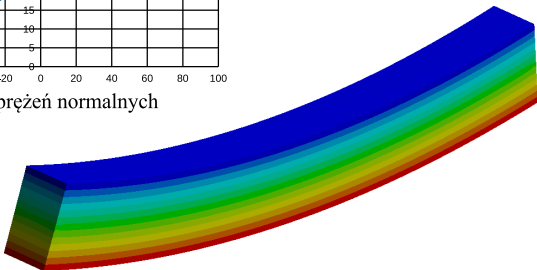
$$\sigma = \frac{My}{I_z}$$

Rozkład naprężeń

- rozkład naprężeń normalnych na wysokości belki –
wynik analizy MES dla czystego zginania

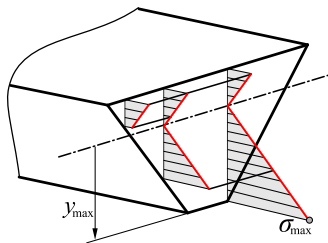
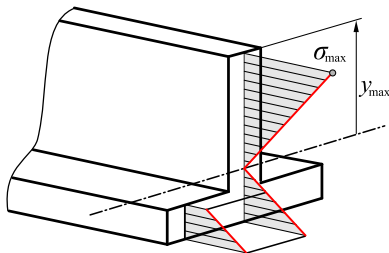


rozkład naprężeń normalnych



Rozkład naprężeń

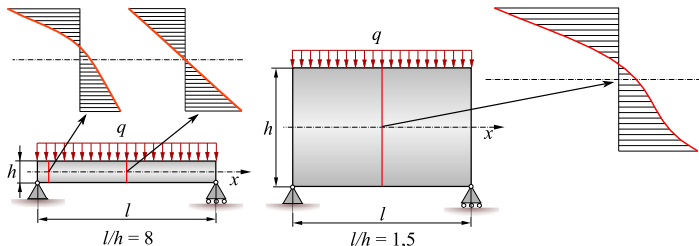
- rozkłady naprężeń dla przykładowych przekroji belki przedstawiono poniżej
- w każdym przypadku rozkład jest liniowy, a wartość zerowa pojawia się w środku ciężkości belki



Rozkład naprężeń

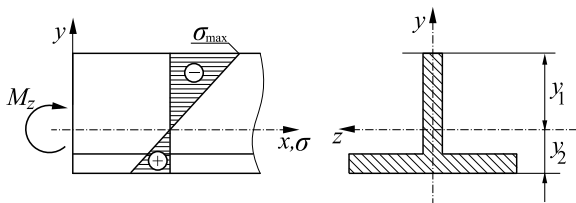
Wpływ geometrii belki na rozkład naprężeń

- liniowy rozkład naprężeń pojawia się w belkach o proporcjach $l/h \geq 8$
- nawet wtedy w okolicach podpory rozkład nie jest liniowy
- dla belek wysokich rozkład naprężeń jest nieliniowy, a oś obojętna jest przesunięta względem środka ciężkości



Rozkład naprężeń

- naprężenia w belce są funkcją liniową odległości od osi obojętnej



- wartość naprężeń gnących wyznaczamy z zależności

$$\sigma = \frac{M_z y}{I_z}$$

- warunek wytrzymałościowy ma postać

$$\sigma_{max} = \frac{M_{z,max} y_{max}}{I_z} \leq \sigma_{dop}$$

Plan wykładu

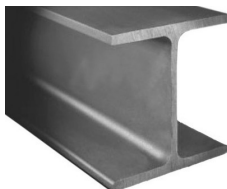
- 1 **Naprężenia w belce zginanej**
 - Podstawowe pojęcia i założenia
 - Naprężenia normalne w belce
 - **Projektowanie belek – warunek wytrzymałościowy**
 - Spiętrzenia naprężeń przy zginaniu

Projektowanie belek

- głównym celem przy projektowaniu belek jest uzyskanie najlepszego stosunku sztywności do masy
- uzyskanie tego wymaga racjonalnego rozłożenia materiału na przekroju belki
- idealnym rozwiązaniem jest podzielenie przekroju poprzecznego na dwa równe obszary i odsunięcie ich jak najdalej od osi obojętnej



belka trójwarstwowa



belka dwuteowa

Projektowanie belek

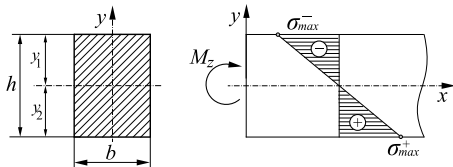
Projektując belkę należy uwzględnić:

- typ konstrukcji (pojazd, samolot, budynek)
- materiał
- wartość i rozkład obciążenia
- warunki pracy
- koszt

Projektowanie belek

Rozpatrzmy belkę o przekroju podwójnie symetrycznym (np. prostokąt, dwuteownik)

- odległości od osi obojętnej do włókien najbardziej rozciąganych i najbardziej ściskanych są takie same
 $y_1 = y_2$
- wartości naprężeń w skrajnych włóknach są takie same
 $\sigma_{max}^- = \sigma_{max}^+$



Projektowanie belek

Jeśli przyjmiemy, że materiał zachowuje się tak samo przy rozciąganiu oraz ściskaniu, możemy uprościć warunek wytrzymałościowy do postaci

$$\sigma_{max} = \frac{M_{z,max}}{W_z} \leq \sigma_{dop}$$

gdzie W_z jest **wskaźnikiem wytrzymałości przekroju na zginanie** definiowanym jako

$$W_z = \frac{I_z}{y_{max}}$$

Wskaźnik ten jest często podawany w katalogach obok momentów bezwładności i pola przekroju.

Projektowanie belek

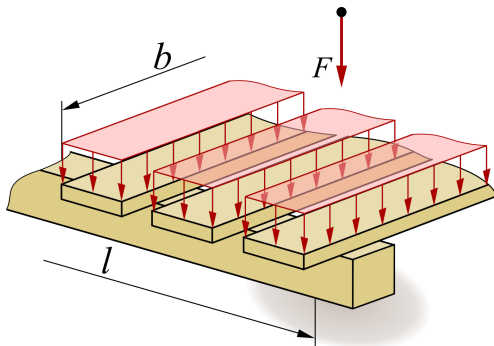
Często w praktyce z warunku wytrzymałościowego wyznacza się minimalną wartość wskaźnika wytrzymałości na zginanie i na jego podstawie dobiera się z katalogu przekrój belki.

$$W_z \geq \frac{M_{z,max}}{\sigma_{dop}}$$

Można w ten sposób dobrać kilka przekroi, dla różnych materiałów, i porównać je po względem masy, ceny oraz aspektów użytkowych.

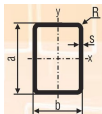
Projektowanie belek – przykład

Dobrać dwie belki podtrzymujące kładkę. Maksymalne obciążenie kładki, rozłożone równomiernie, to 800 kg. Zaproponować dwa rozwiązania z różnych materiałów. Odległość między podporami belki $l = 2500$ mm. Szerokość kładki $b = 1300$ mm.



Projektowanie belek – przykład

KATALOG RUR PROSTOKĄTNYCH STALOWYCH



M = masa 1 metra
 A = pole powierzchni przekroju poprzecznego
 A_u = pole powierzchni zewnętrznej
 I = moment bezwładności
 W = wskaźnik wytrzymałości przekroju
 W_p = plastyczny wskaźnik wytrzymałości
 i = promień bezwładności

I_y = moment bezwładności na skręcanie
 W_y = wskaźnik wytrzymałości przekroju na skręcanie

- Wymiary zalecane
- Po uzgodnieniu przy zamawianiu

Gęstość obliczeniowa = 7,85 g/cm³

a [mm]	b [mm]	s [mm]	M [kg/m]	A [cm ²]	A _u [m ² /m]	I _x [cm ⁴]	I _y [cm ⁴]	W _x [cm ³]	W _y [cm ³]	W _{px} [cm ³]	W _{py} [cm ³]	i _x [cm]	i _y [cm]	I _y [cm ⁴]	W _y [cm ³]
100	80	2,0	5,45	6,94	0,353	103,80	73,87	20,76	18,47	24,38	20,97	3,87	3,26	134,59	29,24
100	80	2,5	6,74	8,59	0,351	126,86	90,17	25,37	22,54	29,98	25,77	3,84	3,24	165,84	35,73
100	80	● 3,0	8,01	10,21	0,350	148,81	105,64	29,76	26,41	35,39	30,40	3,82	3,22	196,12	41,91
100	80	● 4,0	10,48	13,35	0,346	189,47	134,17	37,89	33,54	45,62	39,15	3,77	3,17	253,79	53,38
100	80	5,0	12,84	16,36	0,343	225,94	159,61	45,19	39,90	55,09	47,24	3,72	3,12	307,55	63,72
120	40	2,0	4,82	6,14	0,313	104,07	18,50	17,34	9,25	22,28	10,21	4,12	1,74	52,32	16,78
120	40	2,5	5,96	7,59	0,311	126,71	22,30	21,12	11,15	27,32	12,47	4,09	1,71	63,77	20,27
120	40	3,0	7,07	9,01	0,310	148,04	25,79	24,67	12,89	32,16	14,60	4,05	1,69	74,56	23,51
120	40	4,0	9,22	11,75	0,306	186,89	31,90	31,15	15,95	41,21	18,53	3,99	1,65	94,23	29,24
120	60	2,0	5,45	6,94	0,353	131,92	45,33	21,99	15,11	27,00	16,75	4,36	2,56	107,88	26,05
120	60	2,5	6,74	8,59	0,351	161,23	55,15	26,87	18,38	33,20	20,56	4,33	2,53	132,57	31,75
120	60	● 3,0	8,01	10,21	0,350	189,12	64,40	31,52	21,47	39,18	24,21	4,30	2,51	156,34	37,14
120	60	● 4,0	10,48	13,35	0,346	240,74	81,25	40,12	27,08	50,49	31,08	4,25	2,47	201,12	47,05
120	60	5,0	12,84	16,36	0,343	286,97	95,99	47,83	32,00	60,95	37,38	4,19	2,42	242,23	55,85
120	80	2,0	6,07	7,74	0,393	159,77	86,04	26,63	21,51	31,72	24,09	4,54	3,33	175,00	35,32
120	80	2,5	7,53	9,59	0,391	195,75	105,19	32,63	26,30	39,07	29,65	4,52	3,31	215,82	43,23
120	80	● 3,0	8,96	11,41	0,390	230,20	123,43	38,37	30,86	46,20	35,02	4,49	3,29	255,47	50,80
120	80	● 4,0	11,73	14,95	0,386	294,59	157,29	49,10	39,32	59,77	45,23	4,44	3,24	331,24	64,93
120	80	5,0	14,41	18,36	0,383	353,14	187,78	58,86	46,94	72,45	54,74	4,39	3,20	402,27	77,77
120	80	6,0	16,98	21,63	0,379	406,06	215,03	67,68	53,76	84,25	63,55	4,33	3,15	468,54	89,40

Projektowanie belek – przykład

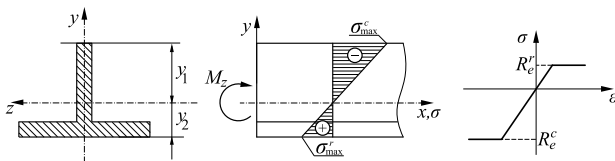
KATALOG DREWNA KONSTRUKCYJNEGO

Wysokość (m)	100	120	140	160	180	200	220	240
Szerokość (mm)								
60	■	■	■	■	■	■	■	■
80	■	■	■	■ ●	■ ●	■ ●	■	■
100	■	■	■ ●	■ ●	■ ●	■ ●	■ ●	■ ●
120		■ ●		■ ●	■ ●	■ ●	■ ●	■ ●
140			■ ●	■ ●	■ ●	■ ●	■ ●	■ ●
160				■ ●		■ ●	■ ●	■ ●
180					■ ●	■ ●	■ ●	■ ●
200						■ ●	■ ●	■ ●
240								■ ●

Projektowanie belek

W przypadku, gdy przekrój belki nie jest symetryczny względem osi obojętnej, a materiał ma inne własności przy rozciąganiu i ściskaniu, należy sprawdzić dwa warunki

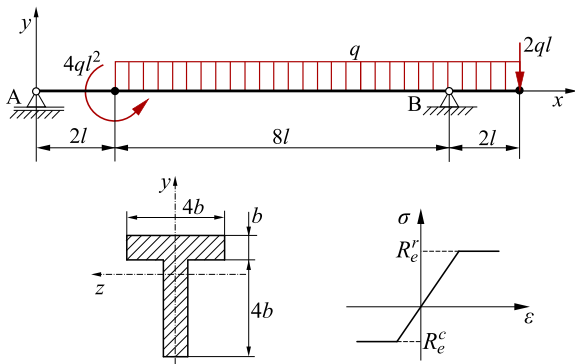
$$\frac{M_{z,max}^c y_1}{I_z} \leq \sigma_{dop}^c \quad \text{oraz} \quad \frac{M_{z,max}^r y_2}{I_z} \leq \sigma_{dop}^r$$



Należy pamiętać, że maksymalne naprężenia rozciągające i ściskające mogą znajdować się w różnym miejscach na długości belki.

Projektowanie belek – przykład

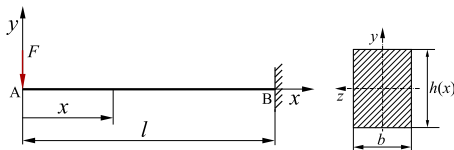
Wyznaczyć ekstremalne wartości naprężeń w belce przedstawionej na rysunku. Przekrój poprzeczny belki ma kształt teownika. Granica plastyczności dla materiału belki: przy rozciąganiu $R_e^r = 120$ MPa, $R_e^c = 75$ MPa. Współczynnik bezpieczeństwa $n = 3$.



Projektowanie belek

Belki o stałej wytrzymałości

- aby w pełni wykorzystać materiał belki należy ją tak ukształtować, aby w każdym jej miejscu naprężenia były równe naprężeniom dopuszczalnym
- tak zaprojektowane belki nazywamy belkami o stałej wytrzymałości
- rozpatrzmy belkę wspornikową przedstawioną poniżej; zakładamy, że szerokość belki będzie stała, a jej wysokość zmienna wzdłuż osi

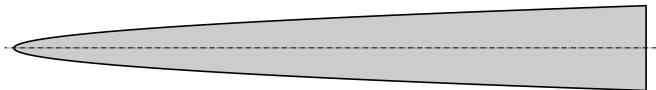


Projektowanie belek

Belki o stałej wytrzymałości

- dla zadanych wartości długości, siły, szerokości i naprężeń dopuszczalnych otrzymamy następującą zależność na wysokość przekroju belki

$$h(x) = \sqrt{\frac{6Fx}{\sigma_{dop}b}} \quad \text{lub} \quad h(x) = h(B)\sqrt{\frac{x}{l}}$$



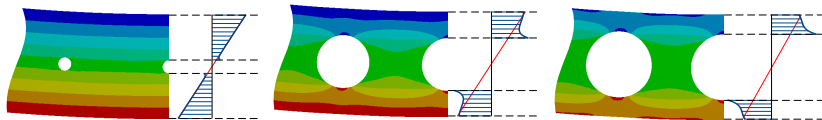
Plan wykładu

- 1 **Naprężenia w belce zginanej**
 - Podstawowe pojęcia i założenia
 - Naprężenia normalne w belce
 - Projektowanie belek – warunek wytrzymałościowy
 - **Spiętrzenia naprężeń przy zginaniu**

Spiętrzenie naprężeń przy zginaniu

Belka z otworem

- przyjrzymy się jak karby wpływają na rozkład naprężeń w belkach
- rozkład naprężeń sprawia, że niewielkie otwory wykonane w osi belki nie osłabiają jej znacząco

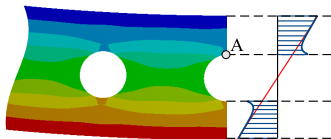


Spiętrzenie naprężeń przy zginaniu

Belka z otworem

- przybliżona formuła na naprężenia na krawędzi otworu belki zginanej

$$\sigma_A \approx 2\sigma_A^{nom} = \frac{2My}{I_z}$$



- otwory w belkach obniżają ich masę oraz pełnią funkcję użytkową – można nimi przeprowadzać przewody różnych instalacji



Spiętrzenie naprężeń przy zginaniu

Belka z karbem

- gorszy wpływ na rozkład naprężeń w belce mają karby zewnętrzne, ponieważ w tych miejscach naprężenia są największe – przenoszona jest największa część obciążenia

