

# Wytrzymałość Materiałów I

## Zginanie Siły wewnętrzne w belce

opracował:

**dr hab. inż. Paweł JASION**

e-mail: `pawel.jasion@put.poznan.pl`

www: `pawel.jasion.pracownik.put.poznan.pl`

**Politechnika Poznańska**  
**Instytut Mechaniki Stosowanej**  
**Zakład Wytrzymałości Materiałów i Konstrukcji**

## 1 Wprowadzenie

- Typy belek, obciążeń i podpór
- Siły poprzeczne i momenty gnące

## 2 Wyznaczanie sił wewnętrznych

- Wpływ obciążenia na wartości sił wewnętrznych
- Wykresy sił poprzecznych i momentów gnących

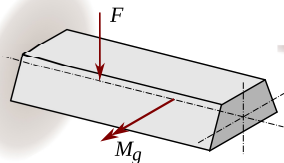
# Plan wykładu

- 1 **Wprowadzenie**
  - Typy belek, obciążeń i podpór
  - Siły poprzeczne i momenty gnące
  
- 2 **Wyznaczanie sił wewnętrznych**
  - Wpływ obciążenia na wartości sił wewnętrznych
  - Wykresy sił poprzecznych i momentów gnących

# Typy belek

## Belka

element konstrukcyjny obciążony w kierunku poprzecznym;  
wektory sił i momentów są prostopadłe do osi pręta



belka swobodnie podparta



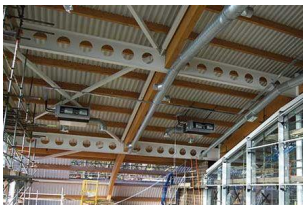
belka z częścią wysięgową



belka utwierdzona

# Przykłady zastosowania belek

- belki używane są przy budowie konstrukcji nośnych oraz ram pojazdów; proste wsporniki również klasyfikowane są jako belki

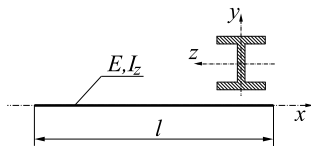


# Modelowanie belek

- belka jest liniowym elementem konstrukcyjnym
- modeluje się ją zatem fragmentem prostej, do której przypisuje się odpowiednie właściwości

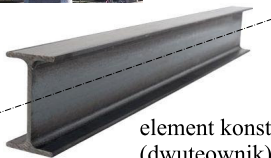


konstrukcja  
wiaduktu



model belki  
- długość  
- materiał  
- przekrój poprzeczny

oś obojętna

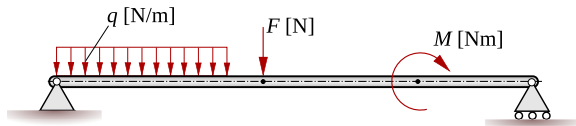


element konstrukcyjny  
(dwuteownik)

# Typy obciążeń

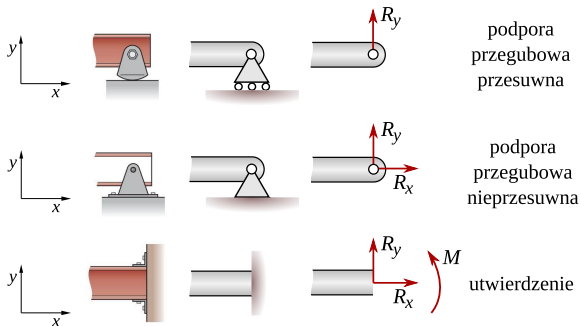
Wektory opisujące obciążenie belki skierowane są prostopadle do jej osi; możliwe są zatem następujące przypadki obciążenia:

- obciążenie punktowe
  - siła skupiona (człowiek stojący na kładce)
  - moment skupiony
- intensywność obciążenia
  - siła rozłożona na odcinku (pociąg stojący na moście)



# Typy podparcia

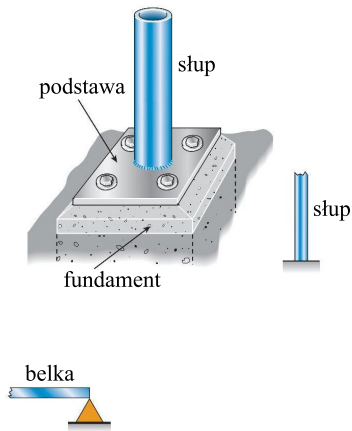
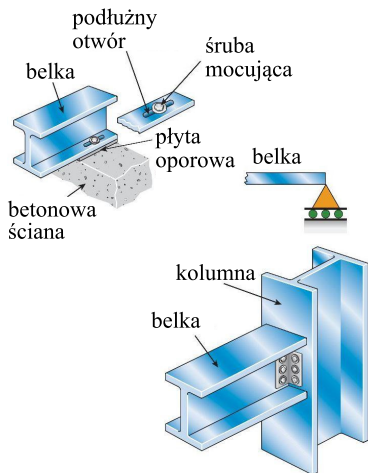
- belka może być podparta przez jedną z trzech podpór
- poniżej przedstawiono schemat realizacji podparcia, model podpory i reakcje, jakie się w niej pojawiają





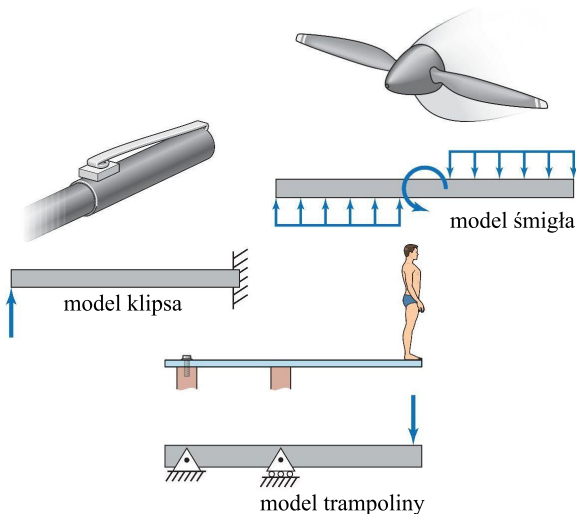
# Typy podparcia

Modelowanie podpór [Gere, Goodno, 2009]



# Typy podparcia

Elementy pracujące jako belki [Steif, 2012]

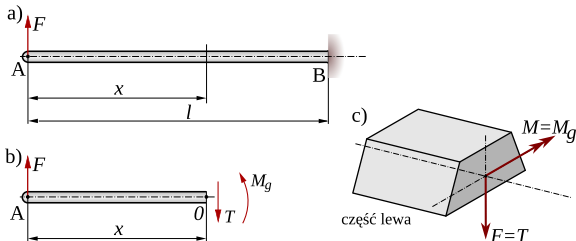


# Plan wykładu

- 1 **Wprowadzenie**
  - Typy belek, obciążeń i podpór
  - **Siły poprzeczne i momenty gnące**
  
- 2 **Wyznaczanie sił wewnętrznych**
  - Wpływ obciążenia na wartości sił wewnętrznych
  - Wykresy sił poprzecznych i momentów gnących

# Siły wewnętrzne w belce

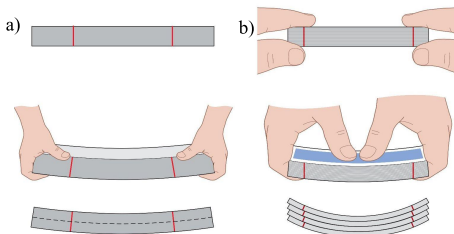
- belka AB obciążona jest siłą poprzeczną  $F$
- aby lewa, odcięta w odległości  $x$ , część pozostawała w równowadze, w miejscu przecięcia należy wprowadzić siły wewnętrzne:
  - siłę poprzeczną (tnącą)  $T$  (równoważy przemieszczenie pionowe)
  - moment gnący  $M_g$  (równoważy obrót)



# Siły wewnętrzne w belce

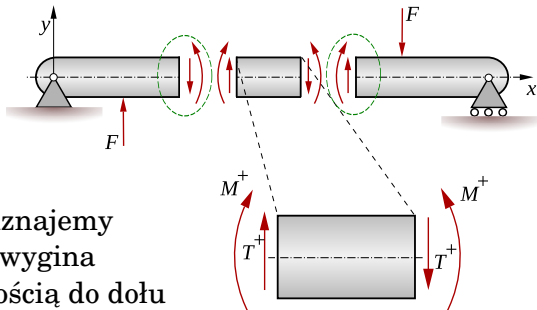
[Steif, 2012]

- o występowaniu naprężeń poprzecznych można przekonać się wykonując proste doświadczenie
- linia prosta, narysowana na belce (a) obraca się po ugięciu, ale pozostaje ciągła
- jeśli belka złożona jest z wielu cienkich warstw (b), to linia rozdziela się; każdy z odcinków obraca się, ale w sumie dalej tworzą one linię prostą, jak przed ugięciem



# Konwencja znaków

- znaki sił wewnętrznych definiujemy dla wyciętego elementu belki

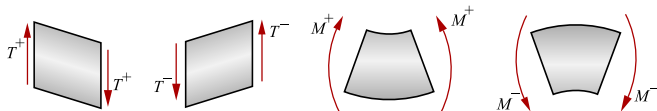


- moment gnący uznajemy za dodatni, jeśli wygina element wypukłością do dołu
- siłę poprzeczną uznajemy za dodatnią, jeśli obraca element zgodnie z ruchem wskazówek zegara

# Konwencja znaków

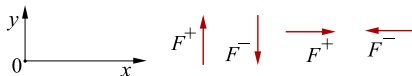
## Konwencja znaków przy deformacji

używana do opisu składowych naprężeń; znak zależy od tego, jak siła odkształca materiał



## Statyczna konwencja znaków

używana przy zapisie równań równowagi; znak zależy od kierunku siły względem osi współrzędnych



# Plan wykładu

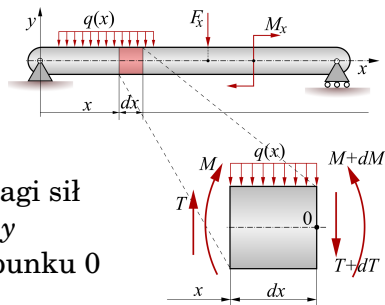
- 1 Wprowadzenie
  - Typy belek, obciążeń i podpór
  - Siły poprzeczne i momenty gnące
- 2 Wyznaczanie sił wewnętrznych
  - Wpływ obciążenia na wartości sił wewnętrznych
  - Wykresy sił poprzecznych i momentów gnących



# Wpływ intensywności siły $q(x)$

Zależności różniczkowe między  $q$ ,  $T$  i  $M$

- aby znaleźć wpływ intensywności siły  $q(x)$  na siły wewnętrzne w belce, rozpatrzmy równowagę elementarnego wycinka belki znajdującego się pod działaniem takiego obciążenia

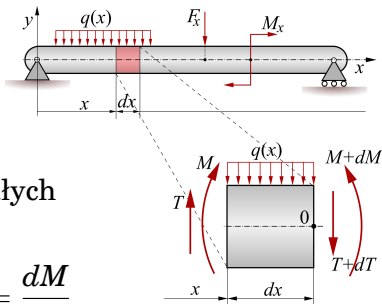


- zapiszmy równania równowagi sił poprzecznych względem osi  $y$  oraz momentów względem punktu  $0$

# Wpływ intensywności siły $q(x)$

Zależności różniczkowe między  $q$ ,  $T$  i  $M$

- aby znaleźć wpływ intensywności siły  $q(x)$  na siły wewnętrzne w belce, rozpatrzmy równowagę elementarnego wycinka belki znajdującego się pod działaniem takiego obciążenia

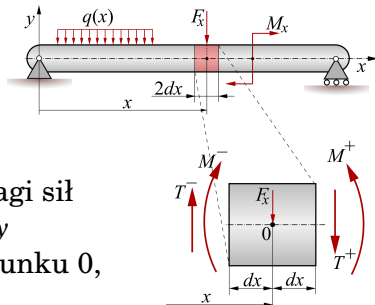


- z równań, po pominięciu małych drugiego rzędu otrzymamy

$$-q(x) = \frac{dT}{dx} = \frac{d^2M}{dx^2}, \quad T = \frac{dM}{dx}$$

# Wpływ siły skupionej $F_x$

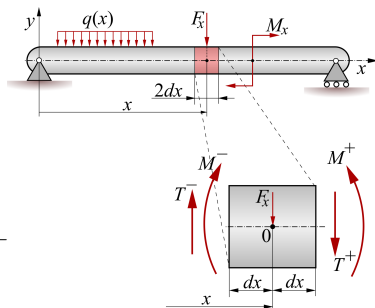
- aby znaleźć wpływ siły skupionej  $F_x$  na siły wewnętrzne w belce, rozpatrzmy równowagę elementarnego wycinka belki znajdującego się pod działaniem takiego obciążenia



- zapiszmy równania równowagi sił poprzecznych względem osi  $y$  oraz momentów względem punktu  $0$ , przy czym  $T^- = T(x - dx)$  i  $T^+ = T(x + dx)$

# Wpływ siły skupionej $F_x$

- aby znaleźć wpływ siły skupionej  $F_x$  na siły wewnętrzne w belce, rozpatrzmy równowagę elementarnego wycinka belki znajdującego się pod działaniem takiego obciążenia

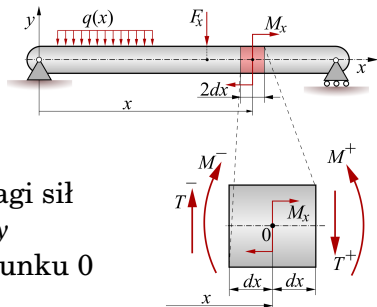


- z równań otrzymamy

$$T^+ = T^- - F_x, \quad M^+ = M^-$$

# Wpływ momentu skupionego $M_x$

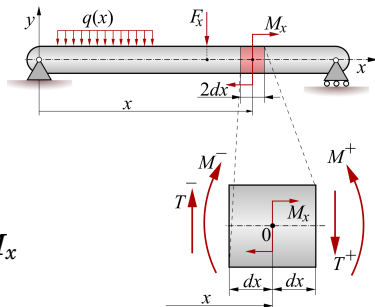
- aby znaleźć wpływ momentu skupionego  $M_x$  na siły wewnętrzne w belce, rozpatrzmy równowagę elementarnego wycinka belki znajdującego się pod działaniem takiego obciążenia



- zapiszmy równania równowagi sił poprzecznych względem osi  $y$  oraz momentów względem punktu  $0$

# Wpływ momentu skupionego $M_x$

- aby znaleźć wpływ momentu skupionego  $M_x$  na siły wewnętrzne w belce, rozpatrzmy równowagę elementarnego wycinka belki znajdującego się pod działaniem takiego obciążenia

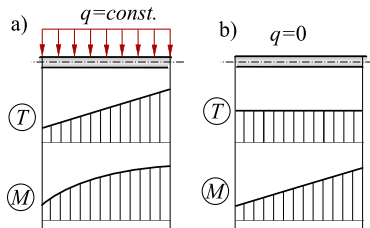


- z równań otrzymamy

$$T^+ = T^-, \quad M^+ = M^- + M_x$$

# Analiza wykresów sił wewnętrznych

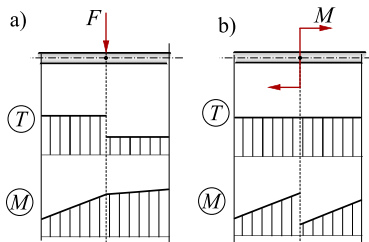
- znajomość wyprowadzonych wcześniej zależności pozwala sprawnie tworzyć wykresy sił wewnętrznych oraz sprawdzać ich poprawność; wynika z nich, że:
  - siła poprzeczna i moment są funkcjami różniącymi się o jeden rząd; jeśli obciążenie  $q(x)$  jest stałe wzdłuż długości belki, to siła poprzeczna  $T(x)$  jest funkcją liniową, a moment  $M(x)$  jest funkcją kwadratową
  - jeśli intensywność obciążenia skierowana jest w dół, to wykres momentu skierowany jest wypukłością w górę, i odwrotnie



# Analiza wykresów sił wewnętrznych

- ...(cd)

- siła skupiona, przyłożona do belki powoduje powstanie na wykresie sił uskoku, równego tej sile, a na wykresie momentu wywołuje zmianę kąta nachylenia przylegających fragmentów wykresu
- moment skupiony, przyłożony do belki powoduje powstanie na wykresie momentów uskoku, równego temu momentowi; wykres sił nie zmienia się





# Plan wykładu

- 1 Wprowadzenie
  - Typy belek, obciążeń i podpór
  - Siły poprzeczne i momenty gnące
  
- 2 Wyznaczanie sił wewnętrznych
  - Wpływ obciążenia na wartości sił wewnętrznych
  - Wykresy sił poprzecznych i momentów gnących

# Wykresy sił poprzecznych

## Schemat rozwiązywania zadań

Zadanie wyznaczenia sił wewnętrznych w belce należy przeprowadzić wg poniższego schematu:

- wprowadzić układ współrzędnych z początkiem na lewym końcu belki oraz oznaczyć punkty charakterystyczne wielkimi literami (A, B, itd.)
- uwolnić układ od więzów, wprowadzając zamiast podpór odpowiednie reakcje
- wyznaczyć wartości reakcji z równań równowagi; zaleca się użycie dwóch równań momentów do wyznaczenia wartości reakcji, a następnie równania sił, do sprawdzenia poprawności obliczeń

# Wykresy sił poprzecznych

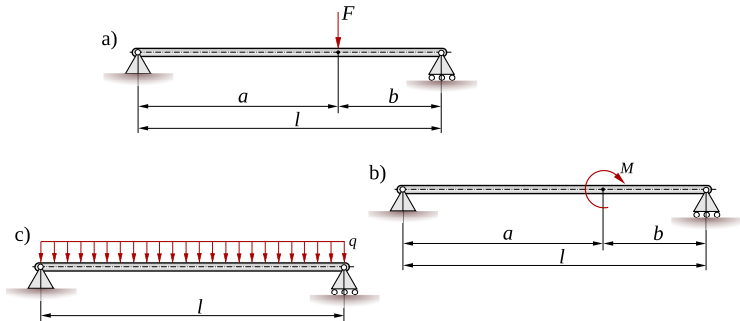
## Schemat rozwiązywania zadań (cd)

- podzielić belkę na przedziały; kolejne przedziały wprowadzamy od lewej strony tam, gdzie zmienia się: obciążenie, materiał, przekrój poprzeczny
- dla każdego przedziału, z warunków równowagi, zapisać równania sił wewnętrznych
- sporządzić wykresy sił wewnętrznych na podstawie otrzymanych wcześniej równań

# Wykresy sił poprzecznych

## Proste przypadki obciążenia

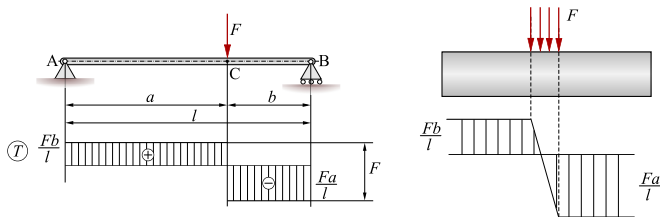
Rozpoczniemy od najprostszych przykładów, które pozwolą nam sprawdzić, jak poszczególne typy obciążenia wpływają na kształt wykresów sił wewnętrznych w całej belce.



# Analiza wykresów sił wewnętrznych

## Siła skupiona

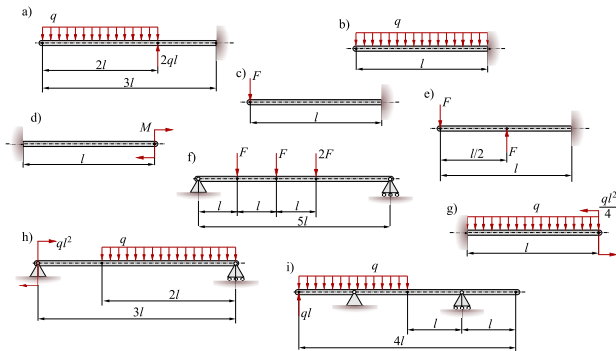
- przyjrzyjmy się rozkładowi sił poprzecznych dla poniższego przykładu
- na wykresie pojawia się uskok równy sile  $F$
- jednak wartość siły w tym punkcie nie jest równa  $F$ ; z lewej strony wykresu jest równa  $(Fb)/l$ , a z prawej  $(Fa)/l$
- jest to oczywiste, jeśli urealni się siłę skupioną  $F$ , która w rzeczywistości jest rozłożona na niewielkim odcinku belki



# Wykresy sił poprzecznych

## Przykłady do samodzielnego rozwiązania

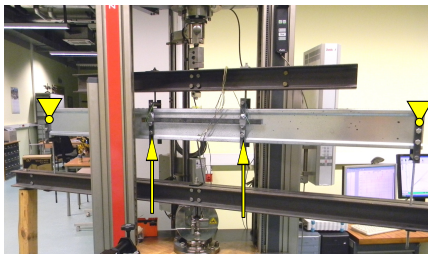
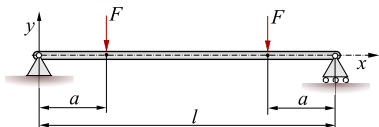
Dla belek przedstawionych na rysunkach wyznaczyć wykresy sił wewnętrznych: siły poprzecznej  $T$  i momentu gnącego  $M$ .  
Zastanowić się, jak zmiana wartości obciążenia lub miejsca jego przyłożenia wpłynie na kształt wykresów sił wewnętrznych.



# Wykresy sił poprzecznych

## Przykład

- ważnym przypadkiem jest belka obciążona symetrycznie dwoma siłami
- z wykresów sił widać, że pomiędzy siłami obciążającymi nie ma sił poprzecznych a moment ma wartość stałą
- w tym obszarze panuje **czyste zginanie**, co wykorzystuje się w badaniach eksperymentalnych



# Wykresy sił poprzecznych

## Przykład – rozwiązanie

Przeanalizować poniższe rozwiązanie.

