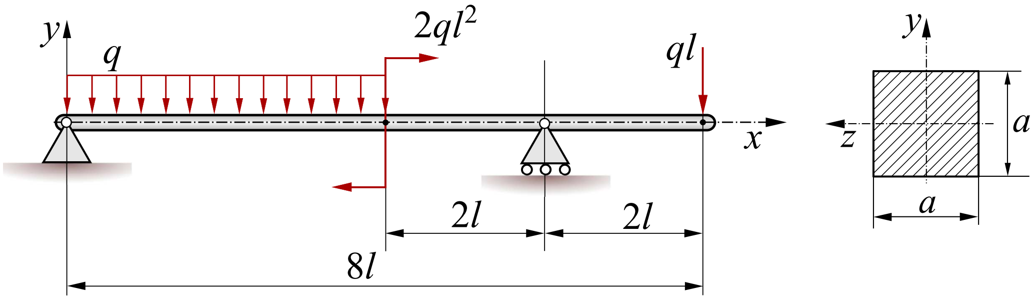
Projektowanie belek

Przykład

Dobrać wymiar a przekroju poprzecznego belki kwadratowej obciążonej jak na Rys. 1 tak, aby spełniony był warunek wytrzymałości. Materiał belki oraz jej przekrój poprzeczny jest taki sam na całej długości. Dane są: parametr długości l i parametr intensywności obciążenia q. Granica plastyczności materiału jest równa R_e, a przyjęty współczynnik bezpieczeństwa równy jest n_e.



Rys. 1: Belka swobodnie podparta

Ogólna postać warunku wytrzymałościowego, jaki musi spełniać projektowana belka to

$$\sigma_{max} \leq \sigma_{dop}. \tag{1}$$

Dla rozważanego przypadku, tzn. dla przekroju podwójnie symetrycznego oraz dla obciążenia statycznego można zapisać

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_z} \quad \text{oraz} \quad \sigma_{dop} = \frac{R_e}{n_e}, \tag{2}$$

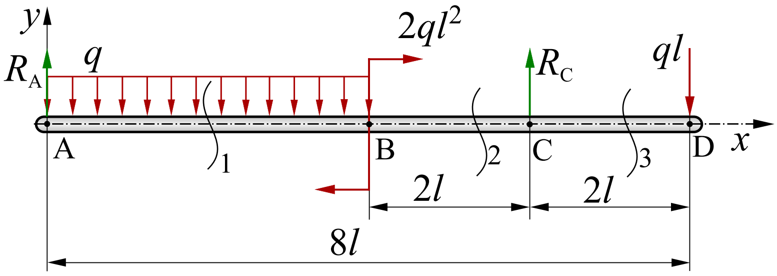
gdzie M_{max} jest najwięszym momentem gnącym pojawiającym się na długości belki (odczytanym z wykresu sił wewnętrznych), a W_z jest wzkaźnikiem wytrzymałości na zginanie zależnym od kształtu przekroju (odczytanym z tablic).
Ponieważ dla przekroju kwadratowego mamy $W_z = a^3/6$ zadanie można sformułować następująco

$$a \geq \sqrt[3]{\frac{6M_{max}n_e}{R_e}}. \tag{3}$$

Projektowana belka ma być belką pryzmatyczną, zatem jej wytrzymałość ocenia się według maksymalnej wartości momentu gnącego pojawiającego się na długości. Aby wyznaczyć wartość momentu należy przygotować wykresy sił wewnętrznych: siły poprzecznej T i momentu gnącego M.

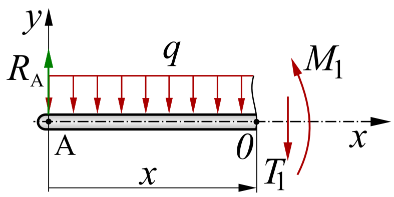
Rozwiązywanie zadania zaczynamy od uwolnienia belki od więzów. Ponieważ obciążenie w postaci siły skupionej i intensywności obciążenia działa w kierunku pionowym, w podporach pojawią się jedynie reakcje wzdłuż tego kierunku: R_A i R_C (Rys. 2) Wartości reakcji wyznaczamy z równań równowagi. Zaleca się, aby użyć do tego równań momentów względem dwóch punków, a poprawność rozwiązania sprawdzić zapisując równanie rzutów sił na oś pionową. W efekcie sprawdzenia powinno się otrzymać $0 = 0$.

$$\begin{aligned} &\sum M_A = 0 \ \rightarrow \ 2ql^2 + 8ql^2 - 6R_C l + 8ql^2 = 0 \ \rightarrow \ R_C = 3ql \\ &\sum M_C = 0 \ \rightarrow \ 6R_A l - 16ql^2 + 2ql^2 + 2ql^2 = 0 \ \rightarrow \ R_A = 2ql \\ &\sum F_y = 0 \ \rightarrow \ 2ql - 4ql + 3ql - ql = 0 \ \rightarrow \ 0 = 0 \end{aligned} \tag{4}$$



Rys. 2: Belka uwolniona od więzów

W belce można wyróżnić trzy przedziały. Równania opisujące siły wewnętrzne w każdym z przedziałów otrzymamy stosując metodę przekroi myślowych. Dla przedziału pierwszego odrzucamy prawą część belki, która będzie równoważona siłą T_1 i momentem M_1. Belkę odcinamy w odległości x od początku układu współrzędnych. Punkt odcięcia oznaczamy jako 0. Pozostały fragment belki przedstawiono na Rys. 3. W pierwszym przedziale $0 \leq x \leq 4l$. Równania dla sił



Rys. 3: Fragment belki dla przedziału 1

wewnętrznych otrzymuje się z równań równowagi dla fragmentu belki. W przedziale 1 będzie:

$$\begin{aligned} &\sum F_y = 0 \ \rightarrow \ 2ql - qx - T_1 = 0 \ \rightarrow \ T_1 = 2ql - qx \\ &\sum M_0 = 0 \ \rightarrow \ 2qlx - \tfrac{1}{2}qx^2 - M_1 = 0 \ \rightarrow M_1 = 2qlx - \tfrac{1}{2}qx^2 \end{aligned} \tag{5}$$

W podobny sposób postępujemy dla pozostałych przedziałów. Na podstawie sześciu uzyskanych równań przygotowujemy wykresy sił wewnętrznych. W każdym przedziale wyznaczamy punkty charakterystyczne, czyli wartości T i M na początku i na końcu przedziału. W przypadku, gdy funkcja opisująca siłę wewnętrzną jest liniowa, łączymy otrzymane punkty. Jeśli jest to funkcja kwadratowa, należy znaleźć maksimum paraboli. Pamiętamy, że zgodnie z zależnością różniczkową $T = dM/dx$. Oznacza to, że maksimum momentu pojawi się w miejscu, gdzie siła poprzeczna jest równa zeru. Współrzędną, dla której siła poprzeczna jest równa zeru można znaleźć przyrównując do zera równanie opisujące siłę T w danym przedziale.

W naszym przypadku, w przedziale pierwszym mamy:

- na początku przedziału $x = 0$ zatem $T_1(0) = 2ql$
- na końcu przedziału $x = 4l$ zatem $T_1(4l) = -2ql$

Ponieważ siła poprzeczna zmienia znak, wyznaczmy jej miejsce zerowe

$$T_1 = 2ql - qx = 0 \quad \rightarrow \quad x = 2l \tag{6}$$

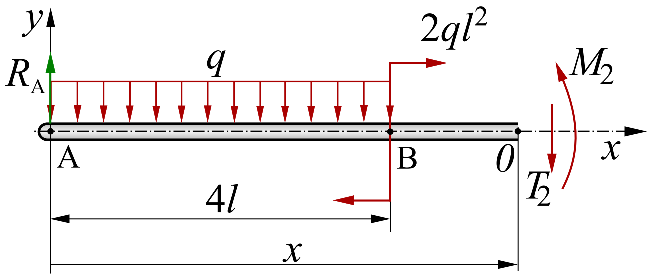
- na początku przedziału $x = 0$ zatem $M_1(0) = 0$
- na końcu przedziału $x = 4l$ zatem $M_1(4l) = 0$

Maksimum momentu występuje tam, gdzie $T_1 = 0$ zatem dla $x = 2l$. Maksymalną wartość momentu znajdujemy podstawiając tą wartość do równania

$$M_1(2l) = M_{max} = 2ql^2 \tag{7}$$

Pamiętamy, że wykres momentu skierowany jest ku górze, jeśli intensywność obciążenia q skierowana jest w dół, i odwrotnie.

W analogiczny sposób postępujemy w dwóch pozostałych przedziałach. W przedziale drugim $4l \leq x \leq 6l$ (Rys. 4)



Rys. 4: Fragment belki dla przedziału 2

$$
\begin{aligned}
&\sum F_y = 0 \;\rightarrow\; 2ql - 4ql - T_2 = 0 \;\rightarrow\; T_2 = -2ql \\
&\sum M_0 = 0 \;\rightarrow\; 2qlx - 4ql(x-2l) + 2ql^2 - M_2 = 0 \;\rightarrow\; M_2 = 2qlx - 4ql(x-2l) + 2ql^2
\end{aligned} \tag{8}
$$

Siła T_2 jest stała w drugim przedziale, więc na wykresie pojawi się linia pozioma.

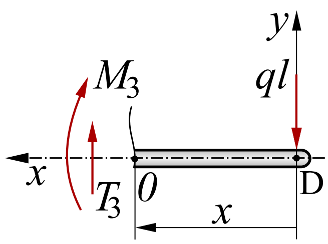
- na początku przedziału $x = 4l$ zatem $M_2(4l) = 2ql^2$
- na końcu przedziału $x = 6l$ zatem $M_2(6l) = -2ql^2$

W przedziale trzecim wygodniej będzie rozpatrzyć prawą część belki. Uprości to znacząco równania, ponieważ pozostanie jedynie jedno obciążenie w postaci siły. W takim przypadku siły wewnętrzne skierowane są inaczej, zgodnie z konwencją znaków, a oś x skierowana jest przeciwnie – jej początek znajduje się na prawym końcu belki. W przedziale trzecim $l \geq x \geq 0$ (Rys. 5)

$$
\begin{aligned}
&\sum F_y = 0 \;\rightarrow\; T_3 - ql = 0 \;\rightarrow\; T_3 = ql \\
&\sum M_0 = 0 \;\rightarrow\; M_3 + qlx = 0 \;\rightarrow\; M_3 = -qlx
\end{aligned} \tag{9}
$$

Siła T_3 jest stała w drugim przedziale, więc na wykresie pojawi się linia pozioma.

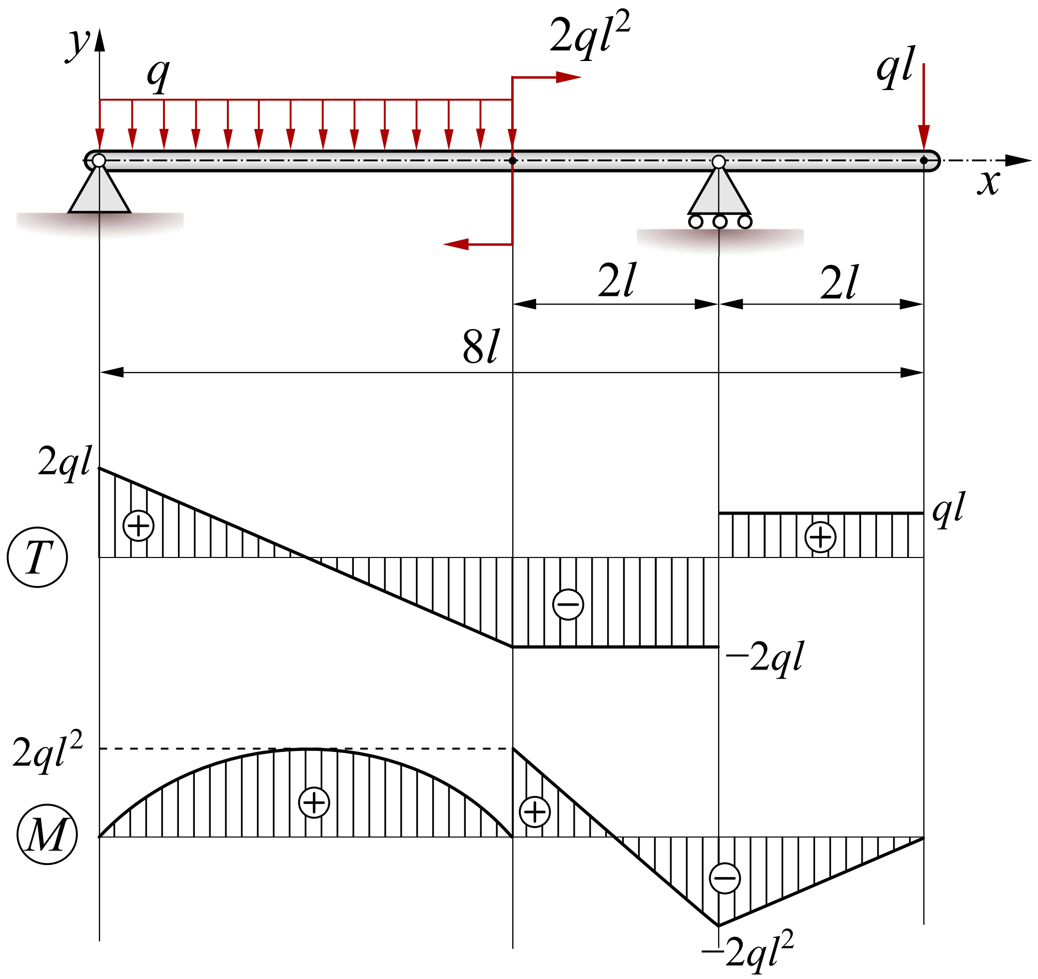
- na początku przedziału $x = 0$ zatem $M_3(0) = 0$
- na końcu przedziału $x = l$ zatem $M_3(l) = -2ql^2$



Rys. 5: Fragment belki dla przedziału 3

Gotowe wykresy przedstawiono na Rys. 6. Maksymalny moment, jaki pojawia się w belce to $M_{max} = 2ql^2$. Podstawiając tę wartość do równania (3) otrzymamy minimalny wymagany wymiar a belki

$$
a \geq \sqrt[3]{\frac{6M_{max}n_e}{R_e}} = \sqrt[3]{\frac{12ql^2n_e}{R_e}}. \tag{10}
$$



Rys. 6: Wykresy sił wewnętrznych