

# Wytrzymałość Konstrukcji Mechanicznych

## Pręty zakrzywione

dr hab. inż. Paweł JASION

e-mail: `pawel.jasion@put.poznan.pl`

www: `pawel.jasion.pracownik.put.poznan.pl`

Politechnika Poznańska  
Instytut Mechaniki Stosowanej  
Zakład Wytrzymałości Materiałów i Konstrukcji

- 1 Zastosowanie prętów zakrzywionych
- 2 Deformacja prętów zakrzywionych
  - Siły wewnętrzne
- 3 Naprężenia w prętach zakrzywionych

# Plan wykładu

- 1 Zastosowanie prętów zakrzywionych
- 2 Deformacja prętów zakrzywionych
  - Siły wewnętrzne
- 3 Naprężenia w prętach zakrzywionych

# Założenia

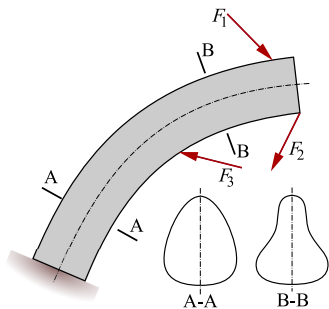
- w większości elementów konstrukcyjnych oś obojętna jest prosta
- jeśli pojawiają się odchylenia, to są zanedbywalnie małe
- są jednak elementy konstrukcyjne, w których linia środkowa jest zakrzywiona



# Założenia

Pręty zakrzywione analizuje się przyjmując podobne założenia, jak dla prętów prostych

- wszystkie przekroje poprzeczne mają oś symetrii
- wszystkie osie symetrii leżą na jednej płaszczyźnie
- oś pręta leży w tej samej płaszczyźnie – jest krzywą płaską
- siły zewnętrzne działają w tej samej płaszczyźnie
- deformacja pręta zachodzi w tej samej płaszczyźnie

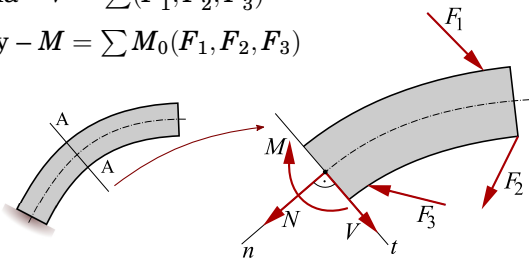


# Plan wykładu

- 1 Zastosowanie prętów zakrzywionych
- 2 Deformacja prętów zakrzywionych
  - Siły wewnętrzne
- 3 Naprężenia w prętach zakrzywionych

# Definicja sił wewnętrznych

- przetnijmy pręt przekrojem A-A i odrzućmy lewą część
- wszystkie siły działające na odrzuconą część będą równoważone siłami wewnętrznymi na przekroju belki
- w prętach zakrzywionych pojawiają się trzy siły wewnętrzne
  - siła normalna –  $N = \sum(F_1^n, F_2^n, F_3^n)$
  - siła poprzeczna –  $V = \sum(F_1^t, F_2^t, F_3^t)$
  - moment gnący –  $M = \sum M_0(F_1, F_2, F_3)$

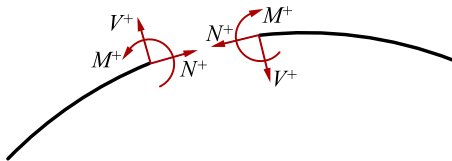


# Konwencja znaków

Wprowadźmy konwencję znaków; jako dodatnie traktujemy

- siły normalne, które są rozciągające
- siły poprzeczne, które otrzymujemy przez obrót dodatniej siły normalnej o  $90^\circ$  w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara
- moment gnący, który zmniejsza krzywiznę pręta

Konwencja powyższa jest prawdziwa dla obu części przeciętego pręta, prawej i lewej.

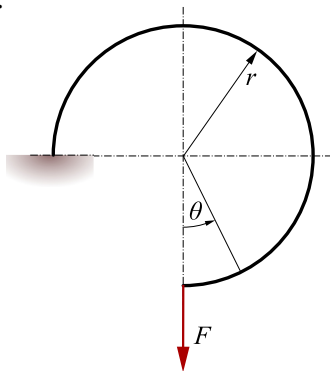




# Pręty zakrzywione

## Przykład 1

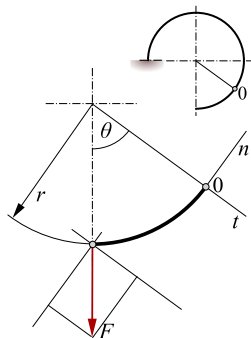
Wyznaczyć siły wewnętrzne w pręcie zakrzywionym, obciążonym siłą  $F$ . Promień osi obojętnej jest równy  $r$ . Kąt  $\theta$  zmienia się w zakresie  $(0, \frac{3}{2}\pi)$ .



# Pręty zakrzywione

## Przykład 1

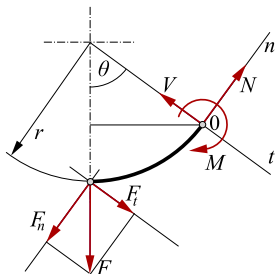
- ponieważ celem zadania jest wyznaczenie sił wewnętrznych, zastosujemy metodę przekroji myślowych
- przekrój wygodnie jest zrobić tak, aby pozostała część pręta była tą z obciążeniem; odrzucając część z podporą unikamy konieczności wyznaczania reakcji w podporze
- odcinamy zatem fragment pręta w punkcie '0' na współrzędnej  $\theta$  licząc od punktu przyłożenia siły
- w punkcie przecięcia wyznaczamy kierunki: normalny do przekroju  $n$  i styczny  $t$
- te same kierunki wyznaczamy w punkcie przyłożenia siły



# Pręty zakrzywione

## Przykład 1

- na przekroju pręta (punkt '0') wprowadzamy siły wewnętrzne, zgodnie z przyjętą wcześniej konwencją znaków
- siłę  $F$  rozkładamy na kierunki  $n$  i  $t$
- zależności na poszczególne siły wewnętrzne otrzymamy z równań równowagi



$$\sum F_n = 0 \rightarrow N - F_n = 0 \rightarrow N = F \sin \theta$$

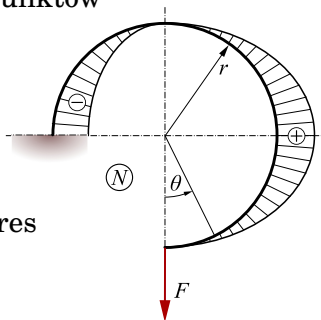
$$\sum F_t = 0 \rightarrow V - F_t = 0 \rightarrow V = F \cos \theta$$

$$\sum M_0 = 0 \rightarrow M - Fr \sin \theta = 0 \rightarrow M = Fr \sin \theta$$

# Pręty zakrzywione

## Przykład 1

- na podstawie otrzymanych równań przygotowujemy wykresy sił wewnętrznych  $N$ ,  $V$ ,  $M$
- z równań widać, że siły te zmieniają się zgodnie z funkcjami trygonometrycznymi
- wygodnie jest wyznaczyć kilka punktów charakterystyczny
  - miejsca zerowe sił
  - maksima i minima sił
- dla czytelności rozwiązania wykres każdej siły dobrze jest umieścić na osobnym rysunku

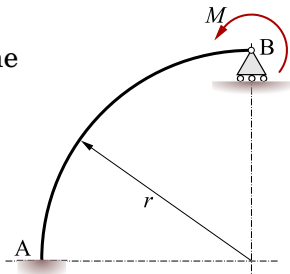


# Pręty zakrzywione

## Przykład 2

Pręt zakrzywiony w postaci ćwiartki okręgu utwierdzony jest na jednym końcu (punkt A) i podparty przesuwnie na drugim końcu (punkt B). Obciążenie, w postaci momentu punkowego  $M$ , przyłożonej jest do końca B.

- narysować wykresy sił wewnętrznych
- wyznaczyć kąt obrotu w punkcie B
- wyznaczyć przemieszczenie poziome w punkcie B

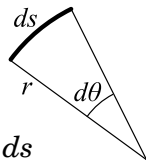


# Pręty zakrzywione

## Przykład 2

- zadanie jest statycznie niewyznaczalne; pojawiają się cztery reakcje
- zatem, aby rozwiązać zadanie, należy najpierw wyznaczyć wartość reakcji nadmiarowej
- można to łatwo zrobić, korzystając z twierdzenia Castigliano-Menabrea; w tym przypadku będzie

$$v_B = \frac{\partial U}{\partial R_B} = \int_l \frac{M(\theta)}{EI} \frac{\partial M(\theta)}{\partial R_B} ds = 0$$



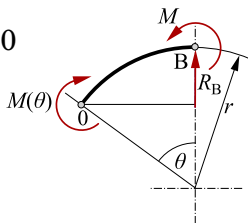
- ponieważ pręt jest zakrzywiony, jego elementarna długość wyrażona jest przez łuk  $ds$
- należy zatem zapisać, że  $ds = r d\theta$ ,  
a granice całkowania zmienić na  $0 \leq \theta \leq \pi/2$

# Pręty zakrzywione

## Przykład 2

- należy teraz zdefiniować moment wewnętrzny  $M(\theta)$  zapisując równanie równowagi
- ponieważ energia odkształcenia postaciowego generowana przez siły normalną i styczną jest zazwyczaj dużo mniejsza niż ta, generowana przez moment, w obliczeniach prętów zakrzywionych pomija się ją
- zgodnie z rysunkiem, równanie momentów względem punktu przecięcia ma postać

$$\sum M_0 = 0 \rightarrow M(\theta) - M - R_B r \sin \theta = 0$$



# Pręty zakrzywione

## Przykład 2

- równanie siły wewnętrznej oraz jej pochodna mają postać

$$M(\theta) = M + R_B r \sin \theta \quad \text{oraz} \quad \frac{\partial M(\theta)}{\partial R_B} = r \sin \theta$$

- podstawiając powyższe do twierdzenia, otrzymamy

$$v_B = \frac{1}{EI} \int_0^{\pi/2} (M + R_B r \sin \theta)(r \sin \theta) r d\theta = 0$$

- a wartość reakcji to  $R_B = -\frac{4M}{\pi r}$



# Pręty zakrzywione

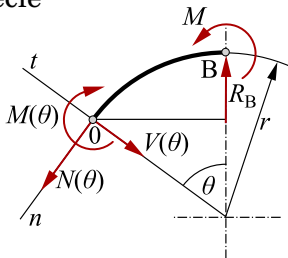
## Przykład 2

- znając wartość reakcji  $R_B$  można wyznaczyć pozostałe reakcje oraz siły wewnętrzne w pręcie

$$N(\theta) = -\frac{4M}{\pi r} \sin \theta$$

$$V(\theta) = -\frac{4M}{\pi r} \cos \theta$$

$$M(\theta) = M\left(1 - \frac{4}{\pi} \sin \theta\right)$$



- według powyższych równań można sporządzić wykresy sił

# Pręty zakrzywione

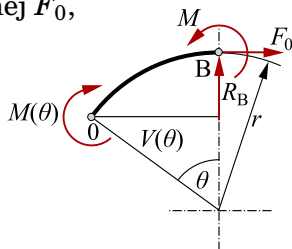
## Przykład 2

- aby wyznaczyć kąt obrotu pręta w punkcie B, należy skorzystać z twierdzenia Castigliano

$$\theta_B = \frac{\partial U}{\partial M}$$

- wyznaczenie przemieszczenia poziomego punktu B wymaga wprowadzania siły fikcyjnej  $F_0$ , zgodnie z rysunkiem, i rozwiązania równania

$$u_B = \frac{\partial U}{\partial F_0}$$



# Plan wykładu

- 1 Zastosowanie prętów zakrzywionych
- 2 Deformacja prętów zakrzywionych
  - Siły wewnętrzne
- 3 Naprężenia w prętach zakrzywionych

# Wyznaczanie naprężeń w prętach zakrzywionych

## Równania równowagi

Wszystkie trzy składowe sił wewnętrznych generują naprężenia

- naprężenia normalne od siły rozciągającej:  $\sigma_N = \frac{N}{A}$
- naprężenia styczne od siły poprzecznej:  $\tau = \frac{TS(y)}{Ib}$
- naprężenia normalne od momentu gnącego:  $\sigma_M = ?$

Aby wyznaczyć te ostatnie należy rozpatrzyć równowagę odciętego fragmentu belki

# Wyznaczanie naprężeń w prętach zakrzywionych

## Analiza odkształceń

Aby uzyskać informacje na temat rozkładu naprężeń na przekroju belki należy rozpatrzyć deformację elementarnego wycinka belki. Zakładamy przy tym, że

- przekrój poprzeczny płaski i normalny do osi obojętnej przed odkształceniem pozostaje taki po odkształceniu
- przekrój ten obraca się wokół osi obojętnej
- wydłużenie i skrócenie włókien, a zatem i naprężenia, wzdłuż linii równo oddalonych od osi obojętnej są takie same

# Naprężenia w prętach zakrzywionych

- naprężenia normalne w prętach zakrzywionych są sumą naprężeń od siły normalnej  $N$  oraz od momentu gnącego  $M$

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M y}{S \rho}$$

gdzie:

$A$  – pole powierzchni przekroju poprzecznego

$S$  – moment statyczny przekroju względem osi obojętnej

$y$  – odległość włókna od osi obojętnej

$\rho$  – promień krzywizny włókna oddalonego o  $y$  od osi obojętnej

- należy pamiętać, że oba składniki naprężeń mogą być dodatnie lub ujemne; należy to ustalić analizując zachowanie się pręta

# Naprężenia w prętach zakrzywionych

- w praktyce wyznacza się wartość naprężeń na powierzchni zewnętrznej pręta, o największym promieniu, i na powierzchni wewnętrznej, gdzie promień jest najmniejszy
- znając dodatkowo położenie osi obojętnej, gdzie naprężenia są równe zeru, można narysować wykres naprężeń na przekroju pręta; wykres ma kształt hiperboli

# Naprężenia w prętach zakrzywionych

Zadanie wyznaczenia rozkładu naprężeń w pręcie zakrzywionym rozwiązujemy następująco

- dla wybranego przekroju, metodą przekroi myślowych, wyznaczyć siły wewnętrzne  $N$  i  $M$
- obliczyć promień maksymalny i minimalny
- wyznaczyć położenie osi obojętnej
- wyznaczyć odległość skrajnych włókien od osi obojętnej
- obliczyć moment statyczny
- obliczyć naprężenia generowane przez moment gnący
- obliczyć naprężenia generowane przez siłę normalną
- obliczyć naprężenia w skrajnych włóknach sumując obie składowe z odpowiednim znakiem

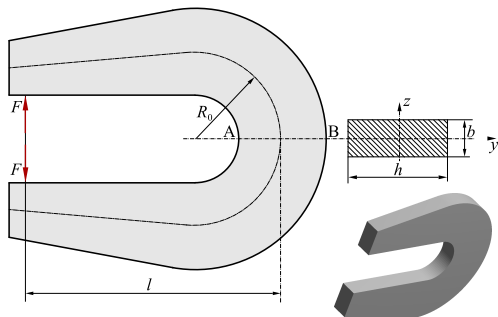


# Naprężenia w prętach zakrzywionych

Przykład 3 [Belyaev, 1979]

Wyznaczyć rozkład naprężeń w przekroju AB pręta zakrzywionego. Przyjąć następujące parametry

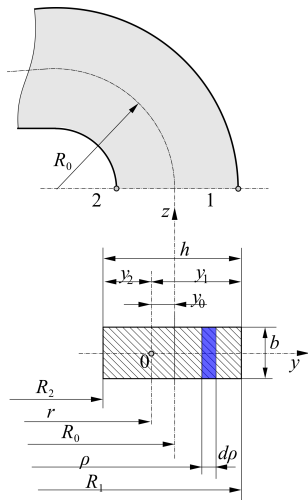
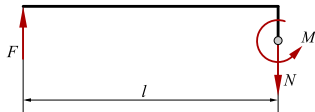
- $F = 8 \text{ kN}$
- $R_0 = 80 \text{ mm}$
- $h = 80 \text{ mm}$
- $b = 30 \text{ mm}$
- $l = 250 \text{ mm}$



# Naprężenia w prętach zakrzywionych

## Przykład 3

- przygotowujemy rysunek, który ułatwi rozwiązanie zadania
- punktem '0' oznaczamy oś obojętną
- z uproszczonego schematu mamy  $N = 8 \text{ kN}$  oraz  $M = 2 \text{ kNm}$
- wartości promieni  $R_1 = 120 \text{ mm}$  oraz  $R_2 = 40 \text{ mm}$



# Naprężenia w prętach zakrzywionych

## Przykład 3

- aby wyznaczyć położenie osi obojętnej  $y_0$ , należy najpierw obliczyć jej promień

$$r = \frac{A}{\int_A \frac{dA}{\rho}} = 72,8 \text{ mm}$$

- mamy zatem

$$y_0 = R_0 - r = 7,18 \text{ mm}$$

- odległości skrajnych włókien

$$y_1 = h/2 + y_0 = 47,18 \text{ mm}$$

$$y_2 = h/2 - y_0 = 32,82 \text{ mm}$$

- moment statyczny

$$S = Ay_0 = 17232 \text{ mm}^3$$

# Naprężenia w prętach zakrzywionych

## Przykład 3

- możemy przystąpić do wyznaczenia naprężeń od momentu gnącego

$$\sigma_1^b = \frac{M}{S} \frac{y_1}{R_1} = -42,63 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2^b = \frac{M}{S} \frac{y_2}{R_2} = 95,23 \text{ MPa}$$

$\sigma_1^b$  są ujemne, ponieważ współrzędna  $y_0$  jest ujemna; poza tym wynika to również z charakteru zadania

- naprężenia od siły normalnej

$$\sigma_N = \frac{N}{A} = 3,33 \text{ MPa}$$

# Naprężenia w prętach zakrzywionych

## Przykład 3

- ostateczne rozwiązanie otrzyma się sumując obie składowe naprężeń

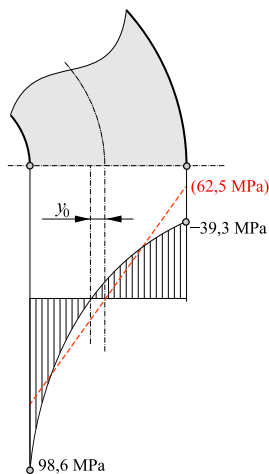
$$\sigma_1 = \sigma_N - \sigma_1^b = -39,3 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = \sigma_N + \sigma_2^b = 98,56 \text{ MPa}$$

- wykorzystując otrzymane wartości oraz położenie osi obojętnej, gdzie naprężenia są równe zero, można przygotować wykres naprężeń

- dla porównania warto nanieść naprężenia wyznaczone tak jak dla belki prostej

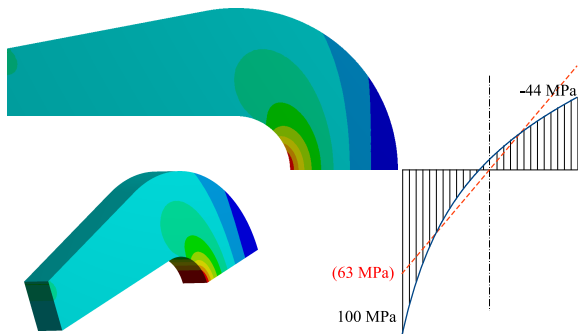
$$\sigma^b = \frac{My}{I_z} = 62,5 \text{ MPa}$$



# Naprężenia w prętach zakrzywionych

## Przykład 3 – rozwiązanie MES

- to samo zadanie rozwiązane metodą elementów skończonych da bardzo zbliżone wyniki



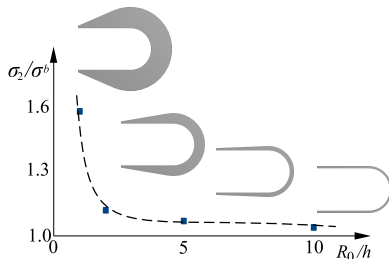
# Naprężenia w prętach zakrzywionych

- z przedstawionego wcześniej rozwiązania widać, że rozkład naprężeń wyznaczany ze wzoru dla prętów zakrzywionych różni się od tego, dla prętów prostych
- naprężenia przy mniejszym promieniu są większe, a przy większym są mniejsze niż naprężenia dla pręta prostego
- różnica ta będzie tym większa, im większe będzie przesunięcie osi obojętnej

# Rozkład naprężeń w prętach zakrzywionych

Wpływ proporcji  $R_0/h$

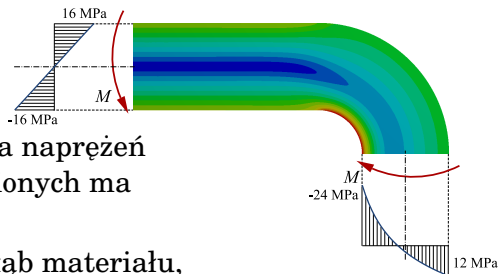
- ponadto znaczenie ma również wysokość profilu
- poniżej widać wpływ stosunku promienia średniego do wysokości profilu
- na osi pionowej przedstawiono stosunek naprężeń przy mniejszym promieniu do naprężeń dla pręta prostego
- na podstawie powyższego wykresu, pręty kwalifikuje się jako
  - silnie zakrzywione, gdy  $R_0/h < 5$
  - średnio zakrzywione, gdy  $R_0/h > 5$





# Rozkład naprężeń w prętach zakrzywionych

## Wskazówki projektowe



- zjawisko spiętrzenia naprężeń w prętach zakrzywionych ma charakter lokalny
- przesuwiają się w głąb materiału, wartość naprężeń szybko spada
- oznacza to, że projektując elementy z materiałów plastycznych obciążonych statycznie, można często pozostawić spiętrzenie naprężeń; materiał w tym miejscu uplastyczni się, a pozostała jego część pozostanie sprężysta

# Rozkład naprężeń w prętach zakrzywionych

## Wskazówki projektowe

- częstym błędem projektowym jest wzmacnianie miejsc ze spiętrzeniem naprężeń
- stosuje się wzmocnienia z cienkiej blachy, w których pojawiają się naprężenia wyższe niż w wyjściowym rozwiązaniu

