Wytrzymałość Konstrukcji Mechanicznych

Metody energetyczne w mechanice

dr hab. inż. Paweł JASION
e-mail: pawel.jasion@put.poznan.pl
www: pawel.jasion.pracownik.put.poznan.pl

Politechnika Poznańska
Instytut Mechaniki Stosowanej
Zakład Wytrzymałości Materiałów i Konstrukcji

Plan wykładu

1. Wprowadzenie
   - Równoważność pracy i energii
   - Energia odkształcenia sprężystego dla prostych przypadków obciążenia
2. Twierdzenie Castigliano

Plan wykładu

1. Wprowadzenie
   - Równoważność pracy i energii
   - Energia odkształcenia sprężystego dla prostych przypadków obciążenia
2. Twierdzenie Castigliano

Rozwiązywanie zagadnień mechaniki

Można wyróżnić dwa podejścia do rozwiązywania zagadnień w mechanice

- podejście wektorowe
  - polega na zapisaniu równania równowagi dla wielkości wektorowej, jak naprężenia czy siły
- podejście energetyczne
  - wykorzystuje się to, że energia wewnętrzna systemu osiąga minimum w stanie równowagi; poprzez minimalizację wyrażenia na energię można znaleźć stan równowagi konstrukcji

- energię układów mechanicznych definiuje się poprzez pracę, jaka została na nich wykonana

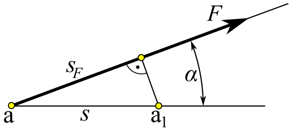
Równoważność pracy i energii

Definicja pracy

- rozpoczniemy zatem od przypomnienia definicji pracy
- pracą wykonaną przez siłę F na punkcie przemieszczając go z pozycji a do pozycji a_1 nazywamy iloczyn tej siły i drogi przebytej przez punkt
- ponieważ w ogólnym przypadku kierunek działania siły nie musi być równy z kierunkiem przemieszczenia punku możemy zapiać

$$W = F \cdot s \cos\alpha \quad \text{lub} \quad W = F \cdot s_F$$

gdzie s_F jest projekcją drogi przebytej przez punk na kierunek działania siły



Równoważność pracy i energii

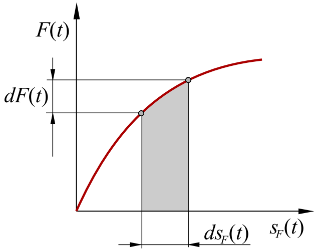
Definicja pracy

- w ogólnym przypadku siła i przemieszczenie zależą od czasu
- mając zależność siły od przemieszczenia w postaci wykresu, można określić wartość pracy licząc pole pod wykresem
- elementarna praca będzie równa

$$dW = F(t) \cdot ds_F(t)$$

- a po scałkowaniu

$$W = \int_0^{s_F} F(t) \cdot ds_F(t)$$



Równoważność pracy i energii

Zamiana energii potencjalnej na energię odkształcenia postaciowego

Jak energia potencjalna obciążenia jest zamieniana na energię odkształcenia sprężystego?

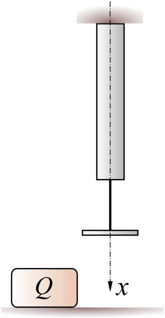
Zanim zaczniemy rozważania, przyjmijmy pewne założenia:

- obciążenie ma charakter statyczny – przykładane jest stopniowo, a przyspieszenia konstrukcji można pominąć
- deformacja pręta jest na tyle powolna, aby można było pominąć zjawisko bezwładności
- w każdym momencie obciążania zarówno układ, jak i jego części są w równowadze
- materiał pręta podlega prawu Hooke'a

Równoważność pracy i energii

Zamiana energii potencjalnej na energię odkształcenia postaciowego

- jako przykład rozpatrzmy pręt pionowy utwierdzony na górnym końcu, ze sztywnym dyskiem przymocowanym na sztywno do drugiego końca
- obok pręta znajduje się ciężar Q, który zostanie umieszczony na dysku
- po podniesieniu ciężar zyska pewną energię, a po upuszczeniu na dysk ciężar obniży się w skutek wydłużania się pręta

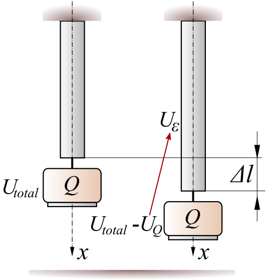


Równoważność pracy i energii

Zamiana energii potencjalnej na energię odkształcenia postaciowego

- obniżenie ciężaru o Δl wiąże się ze spadkiem jego energii o U_Q
- ta energia zostaje zamieniona na energię odkształcenia postaciowego U_ε
- obie energie możemy wyrazić poprzez pracę – energię ciężaru jako pracę sił zewnętrznych (W_e), a energię odkształcenia postaciowego jako pracę sił wewnętrznych $(-W_i)$
- czyli

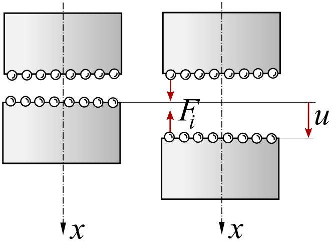
$$U_Q = W_e \qquad \text{oraz} \qquad U_\varepsilon = -W_i$$



Równoważność pracy i energii

Zamiana energii potencjalnej na energię odkształcenia postaciowego

- należy wyjaśnić, dlaczego praca sił wewnętrznych jest ujemna
- siły wewnętrzne to siły oddziaływania między atomami
- w czasie rozciągania atomy przemieszczają się zgodnie z osią, natomiast siły oddziaływania skierowane są przeciwnie do osi – praca jest zatem ujemna



Równoważność pracy i energii

- zgodnie z zasadą zachowania energii dla ciał sprężystych

$$U_Q = U_\varepsilon$$

- co jest zgodne z zasadą prac wirtualnych

$$W_e = -W_i \quad \rightarrow \quad W_e - W_i = 0$$

- ostatecznie możemy zapisać

$$U_\varepsilon = W_e$$

Uwaga!

tylko inne formy energii mogą przekształcić się w energię odkształcenia sprężystego; praca W_e jest tylko miarą energii potencjalnej sił zewnętrznych

Pierwsza zasada termodynamiki

- ten sam wyniki otrzymamy wychodząc z pierwszej zasady termodynamiki
- nie można zmierzyć całkowitej energii wewnętrznej układu; można jednak zmierzyć zmiany tej energii

Pierwsza zasada termodynamiki

Suma pracy wykonanej na układzie mechanicznym przez siły zewnętrzne i ciepła dostarczonego do układu z zewnątrz jest równa sumie wzrostu energii wewnętrznej i zwiększeniu energii kinetycznej

$$\delta W + \delta H = \delta U + \delta K$$

- zakładając brak wymiany ciepła i brak ruchu

$$\delta W = \delta U$$

Plan wykładu

1. Wprowadzenie
   - Równoważność pracy i energii
   - Energia odkształcenia sprężystego dla prostych przypadków obciążenia
2. Twierdzenie Castigliano

Energia odkształcenia sprężystego

Wyznaczanie energii odkształcenia sprężystego dla prostych przypadków obciążenia.

- rozciąganie (ściskanie)
  - obciążenie: siła osiowa F
    przemieszczenie: wydłużenie Δl

$$U_F = \frac{1}{2}\frac{F^2 l}{EA}$$

$$U_F = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{F^2 dx}{EA} \quad lub \quad U_F = \int_0^l \frac{EA}{2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx$$

Energia odkształcenia sprężystego

Wyznaczanie energii odkształcenia sprężystego dla prostych przypadków obciążenia.

- skręcanie
  - obciążenie: moment skręcający M_s
    przemieszczenie: kąt skręcenia φ

$$U_{M_s} = \frac{1}{2}\frac{M_s^2 l}{GI_0}$$

$$U_{M_s} = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{M_s^2 dx}{GI_0} \quad lub \quad U_{M_s} = \int_0^l \frac{GI_0}{2}\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 dx$$

Energia odkształcenia sprężystego

Wyznaczanie energii odkształcenia sprężystego dla prostych przypadków obciążenia.

- zginanie
  - obciążenie: moment gnący M_g
    przemieszczenie: kąt obrotu belki θ

$$U_{M_g} = \frac{1}{2}\frac{M_g^2 l}{EI}$$

$$U_{M_g} = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{M_g^2 dx}{EI} \quad lub \quad U_{M_g} = \int_0^l \frac{EI}{2}\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 dx$$

Energia odkształcenia sprężystego

- wszystkie powyższe formuły mają taką samą strukturę, co ułatwia to ich zapamiętanie i użycie przy rozwiązywaniu zadań
- struktura ta ma postać

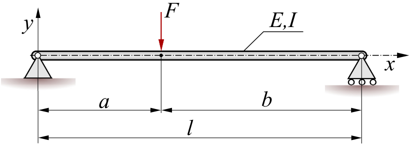
$$U = \frac{P_i \delta_i}{2}$$

  - δ_i – współrzędna uogólniona
    - $u, \ \varphi, \ \theta$
  - P_i – siła uogólniona
    - $F, \ M_s, \ M_g$
- do powyższej równości wrócimy przy wyprowadzaniu twierdzenia Castigliano

Energia odkształcenia sprężystego

Przykład 1

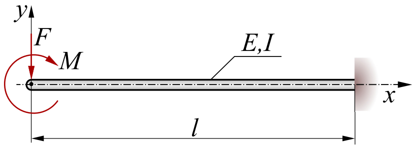
Wyznaczyć energię odkształcenia sprężystego zgromadzoną w swobodnie podpartej belce obciążonej siłą poprzeczną F.



Energia odkształcenia sprężystego

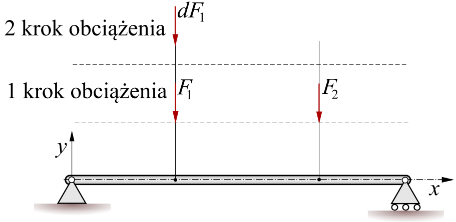
Przykład 2

Wyznaczyć energię odkształcenia sprężystego zgromadzoną w belce wspornikowej obciążonej na swobodnym końcu siłą poprzeczną F i momentem gnącym M.



Twierdzenie Castigliano

- rozważmy belkę swobodnie podpartą, obciążaną w dwóch etapach
- energia odkształcenia postaciowego nie zależy od kolejności tych etapów



Twierdzenie Castigliano

Theorem

Pochodna cząstkowa energii odkształcenia sprężystego wyznaczona względem danej siły jest równa przemieszczeniu punktu w kierunku, w którym ta siła działa.

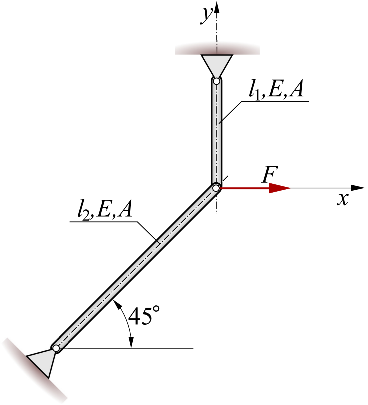
$$\delta_i = \frac{\partial U}{\partial P_i}$$

- δ_i – współrzędna uogólniona
  - $u, \ \varphi, \ \theta$
- P_i – siła uogólniona
  - $F, \ T, \ M$

Twierdzenie Castigliano

Przykład 1

Wyznaczyć przemieszczenie poziome u i pionowe v punktu przyłożenia siły.



Twierdzenie Castigliano

Z praktycznych powodów często używa się zmodyfikowanego twierdzenia Castigliano

$$\delta_i = \frac{\partial U}{\partial P_i} = \frac{\partial}{\partial P_i} \int \frac{M(x)^2}{2EI} dx = \int \frac{M(x)}{EI} \frac{\partial M(x)}{\partial P_i} dx$$

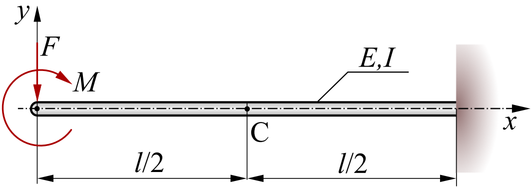
Ponieważ zwykle są dwie współrzędne uogólnione, możemy zapisać

$$v = \frac{\partial U}{\partial F} = \int \frac{M(x)}{EI} \frac{\partial M(x)}{\partial F} dx$$

$$\theta = \frac{\partial U}{\partial M} = \int \frac{M(x)}{EI} \frac{\partial M(x)}{\partial M} dx$$

Twierdzenie Castigliano

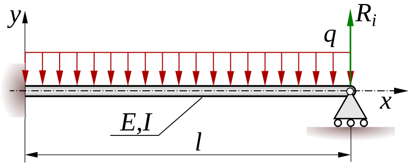
Wyznaczyć przemieszczenie pionowe belki wspornikowej w punkcie C.



Twierdzenie Castigliano

- szczególnym przypadkiem twierdzenia Castigliano jest twierdzenie Castigliano-Menabrea
- pozwala ono rozwiązywać zadania statycznie niewyznaczalne
- ponieważ wiadomo, że przemieszczenie punktu, w którym belka jest podparta jest równe zeru, możemy zapisać

$$u_{R_i} = \frac{\partial U}{\partial R_i} = 0$$



Twierdzenie Castigliano

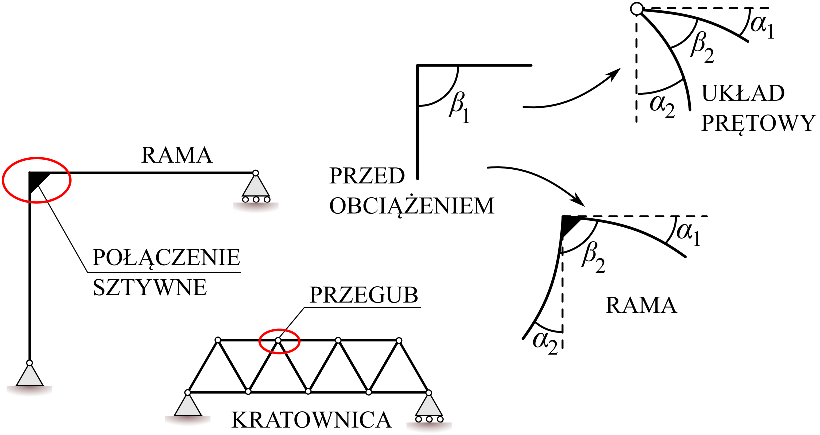
Dzięki twierdzeniu Castigliano można

- wyznaczać przemieszczenia punktów konstrukcji, w których przyłożone jest obciążenie
- wyznaczać przemieszczenia dowolnych punktów konstrukcji poprzez przyłożenie w nich „siły zerowej”
- obliczać zadania statycznie niewyznaczalne

Poziom trudności zadania nie zależy od złożoności konstrukcji.

Twierdzenie Castigliano

Analiza ram



Twierdzenie Castigliano

Rama obciążona jest intensywnością q. Oba elementy ramy mają jednakową długość l i taką samą sztywność E, I.
Wyznaczyć:

- maksymalny moment gnący,
- przemieszczenie punktu C,
- obrót w punkie B.