Wytrzymałość Materiałów I

Naprężenia i odkształcenia przy czystym ścinaniu

opracował:
dr hab. inż. Paweł JASION
e-mail: pawel.jasion@put.poznan.pl
www: pawel.jasion.pracownik.put.poznan.pl

Politechnika Poznańska
Instytut Mechaniki Stosowanej
Zakład Wytrzymałości Materiałów i Konstrukcji

Plan wykładu

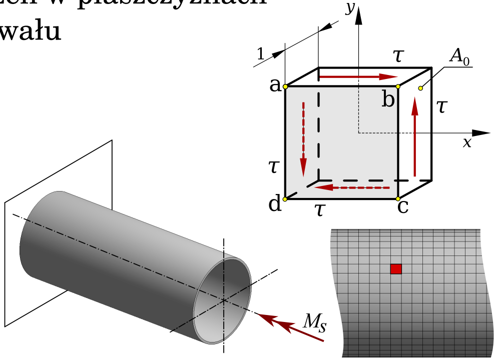
1. Naprężenia i odkształcenia przy czystym ścinaniu
   - Analiza naprężeń
   - Analiza odkształceń

Plan wykładu

1. Naprężenia i odkształcenia przy czystym ścinaniu
   - Analiza naprężeń
   - Analiza odkształceń

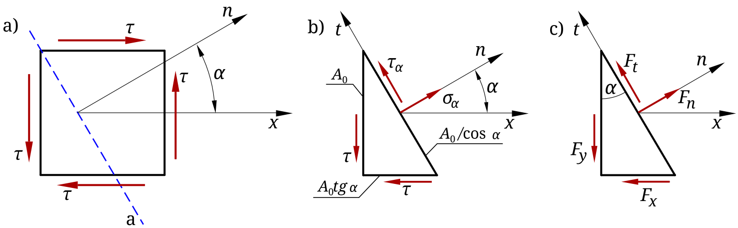
Naprężenia przy czystym ścinaniu

- wycinek *abcd* skręcanego pręta znajduje się w stanie czystego ścinania
- analiza takiego wycinka, o grubości 1, pozwala na wyznaczenie naprężeń w płaszczyznach nachylonych do osi wału pod kątem α



Naprężenia przy czystym ścinaniu

- przetnijmy wycinek *abcd* płaszczyzną „a” i odrzućmy prawą część
- normalna tej płaszczyzny nachylona jest do osi x pod kątem α
- na powstałej płaszczyźnie wycinka możemy zdefiniować naprężenia normalne σ_α oraz styczne τ_α
- każde z tych naprężeń generuje na właściwej powierzchni siłę: F_x, F_y, F_n i F_t



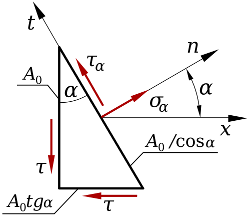
Naprężenia przy czystym ścinaniu

- rozpatrzmy równowagę wycinka, zapisując równania rówowagi sumy rzutów sił na oś normalną i styczną

$$\begin{cases} \sum F_n = 0 \;\rightarrow\; F_n - F_x \cos\alpha - F_y \sin\alpha = 0 \\ \sum F_t = 0 \;\rightarrow\; F_t + F_x \sin\alpha - F_y \cos\alpha = 0 \end{cases}$$

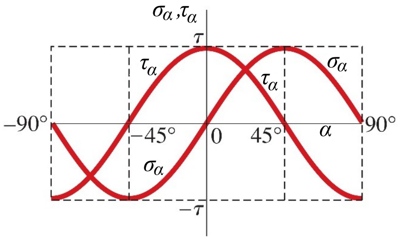
- zastępując siły w powyższym układzie iloczynami naprężeń i powierzchni, po uporządkowaniu otrzymamy wyrażenia na wartości naprężeń normalnych i stycznych na płszczyźnie nachylonej

$$\begin{cases} \sigma_\alpha = \tau \sin 2\alpha \\ \tau_\alpha = \tau \cos 2\alpha \end{cases}$$



Naprężenia przy czystym ścinaniu

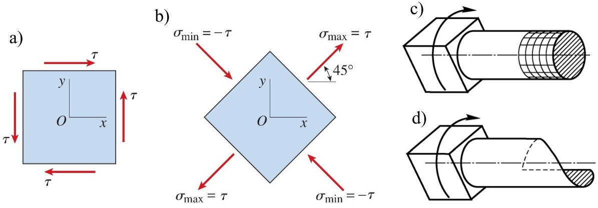
- zmiana naprężeń w płaszczyźnie nachylonej pod kątem $\alpha \pm 90^\circ$ do osi wału



$$\begin{cases} \sigma_\alpha = \tau \sin 2\alpha \\ \tau_\alpha = \tau \cos 2\alpha \end{cases}$$

Naprężenia przy czystym ścinaniu

- przypadek szczególny: dla $\alpha = 45°$, $\sigma_\alpha = \sigma_{max} = \tau$, $\tau_\alpha = 0$; oznacza to, że na ściankach pojawiają się tylko naprężenia normalne
- materiał plastyczny pęka w płaszczyźnie prostopadłej do osi wału
- materiał kruchy pęka wzdłuż linii śrubowej nachylonej do osi pręta pod kątem $\alpha = 45°$

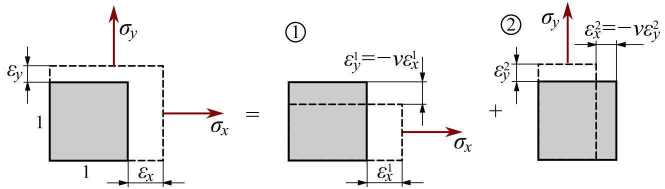


Plan wykładu

1. Naprężenia i odkształcenia przy czystym ścinaniu
    - Analiza naprężeń
    - Analiza odkształceń

Odkształcenia przy czystym ścinaniu

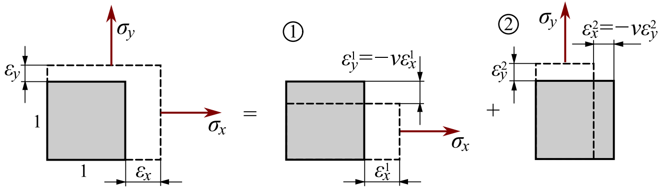
- w elemencie poddanym czystemu ścinaniu, w płaszczyźnie nachylonej pod kątem 45°, naprężenia działają w dwóch kierunkach
- znajdźmy zależność $\sigma\tilde{\varepsilon}$ dla takiego przypadku, zwanego płaskim lub dwuosiowym stanem naprężeń
- jednoczesne rozciąganie w dwóch kierunkach rozpatrzymy jako sumę rozciągania w jedym i w drugim kierunku



Odkształcenia przy czystym ścinaniu

- odkształcenia w poszczególnych kierunką są sumą odkształceń wywołanych naprężeniami σ_x oraz σ_y; możemy zatem zapisać

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \varepsilon_x^1 + \varepsilon_x^2 = \varepsilon_x^1 - \nu\varepsilon_y^2 = \dfrac{\sigma_x}{E} - \nu\dfrac{\sigma_y}{E} \\ \varepsilon_y = \varepsilon_y^1 + \varepsilon_y^2 = -\nu\varepsilon_x^1 + \nu\varepsilon_y^2 = -\nu\dfrac{\sigma_x}{E} + \dfrac{\sigma_y}{E} \end{cases}$$



Odkształcenia przy czystym ścinaniu

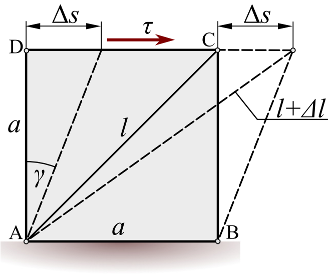
- ozwiązując powyższy układ ze względu na σ_x i σ_y otrzymamy

$$\begin{cases} \sigma_x = \dfrac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y\right) \\ \sigma_y = \dfrac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x\right) \end{cases}$$

- powyższy układ równań jest prawem Hooke'a dla płaskiego stanu naprężeń

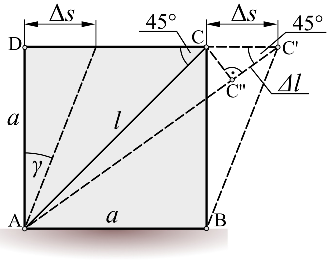
Odkształcenia przy czystym ścinaniu

- przeanalizujmy odkształcenie elementarnego wycinka będącego w stanie czystego ścinania i spróbujmy powiązać jej odkształcenie ε z kątem odkształcenia postaciowego γ oraz z naprężeniami stycznymi τ. Znajdziemy w ten sposób zależność między γ i τ



Odkształcenia przy czystym ścinaniu

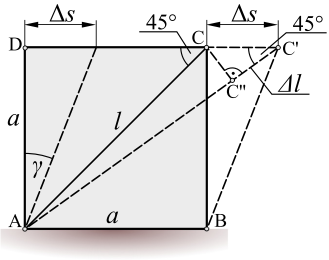
- analizowany kwadrat ma bok o wymiarze a, zatem przekątna $l = \sqrt{2}a$
- wydłużenie przekątnej można wyznaczyć z trójkąta CC'C" i będzie ono równe $\Delta l = \Delta s \cos 45°$



Odkształcenia przy czystym ścinaniu

- odkształcenie normalne będzie wtedy równe

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{\Delta s \cos 45^\circ}{\sqrt{2}a} = \frac{1}{2}\frac{\Delta s}{a}$$



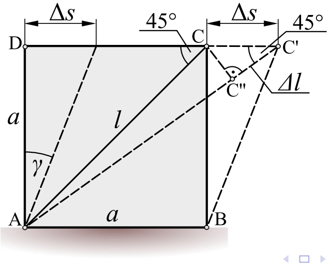
Odkształcenia przy czystym ścinaniu

- pamiętając o tym, że kąt γ jest mały, możemy zapisać

$$\gamma \approx \mathrm{tg}\gamma = \frac{\Delta s}{a}$$

- możemy teraz zapisać zależność między odkształceniem normalnym i postaciowym

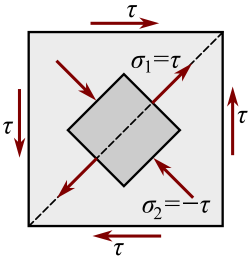
$$\varepsilon = \frac{1}{2}\gamma.$$



Odkształcenia przy czystym ścinaniu

- powiążmy odkształcenia z naprężeniami
- stan naprężeń w elemencie znajdującym się w stanie czystego ścinania przedstawiono na rysunku
- zgodnie z wyprowadzonymi wcześniej zależnościami możemy zapisać

$$\varepsilon = \frac{\sigma_1}{E} - \nu\frac{\sigma_2}{E} = \frac{\tau}{E} + \nu\frac{\tau}{E} = \tau\frac{(1+\nu)}{E}$$



Odkształcenia przy czystym ścinaniu

- ostatecznie możemy zapisać związek

$$\tau = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma$$

- a pamiętają prawo Hooke'a dla ścinania

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Bibliografia

Gere J.M., Goodno B.J.
Mechanics of materials
Cengage Learning, Australia, 2009

Hibbeler, R.C.
Statics and Mechanics of Materials
Pearson, New York, 2014

Steif, P.S.
Mechanics of Materials
Pearson, New York, 2012