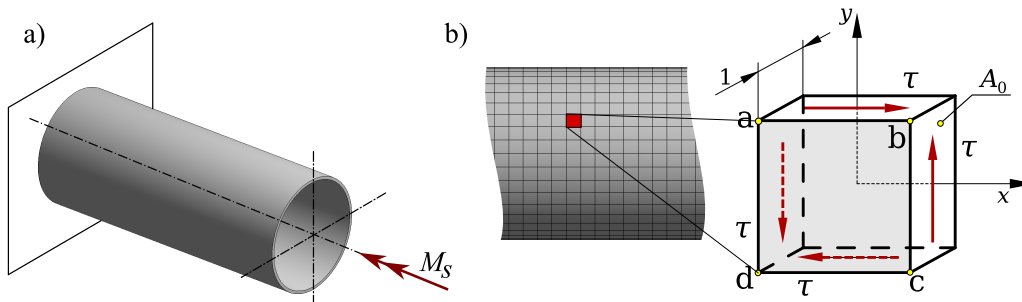


Naprężenia i odkształcenia przy czystym ścinaniu

Naprężenia

W skręcanym wale, na powierzchniach prostopadłych do osi oraz równoległych do nich pojawiają się naprężenia styczne. Sprawdźmy jednak, co dzieje się na powierzchni nachylonej pod pewnym kątem do osi wału. W tym celu wytnijmy element wału znajdującego się w stanie czystego skręcania, z momentem skręcającym przyłożonym tak, aby naprężenia styczne były dodatnie (Rys. 1a).

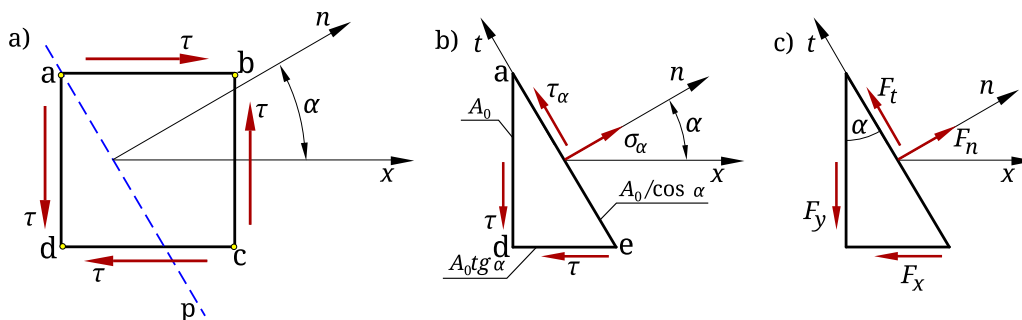
Wycinek abcd skręcanego pręta przedstawionego na Rys. 1b znajduje się w stanie czystego ścinania. Analiza takiego wycinka, o grubości 1, pozwala na wyznaczenie naprężeń w płaszczyznach nachylonych do osi wału pod kątem α .



Rys. 1: Wał w stanie czystego skręcania

Przetnijmy wycinek abcd płaszczyzną „p” oznaczoną na Rys. 2a i odrzućmy jego prawą część. Normalna tej płaszczyzny nachylona jest do osi x pod kątem α . Otrzymamy w ten sposób trójkąt ade, którego bok przy dłuższej przyprostokątnej ma pole równe A_0 . Pola pozostałych boków można wyznaczyć pamiętając, że znany jest kąt α . Będą one równe $A_0 \operatorname{tg} \alpha$ oraz $A_0 / \cos \alpha$, zgodnie z Rys. 2b.

Na powstałej płaszczyźnie „p” wycinka możemy zdefiniować naprężenia normalne σ_α oraz styczne τ_α . Na pozostałych płaszczyznach wycinka działają naprężenia τ . Każde z powyższych naprężeń generuje na właściwej powierzchni siłę: F_x , F_y , F_n i F_t , jak na Rys. 2c.



Rys. 2: Rozkład naprężeń w elementarnym wycinku wału

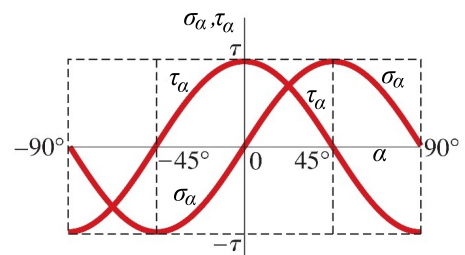
Rozpatrzmy równowagę wycinka, zapisując równania równowagi sumy rzutów sił na oś normalną n i styczną t . Mają one postać

$$\begin{cases} \sum F_n = 0 \rightarrow F_n - F_x \cos \alpha - F_y \sin \alpha = 0 \\ \sum F_t = 0 \rightarrow F_t + F_x \sin \alpha - F_y \cos \alpha = 0 \end{cases}$$

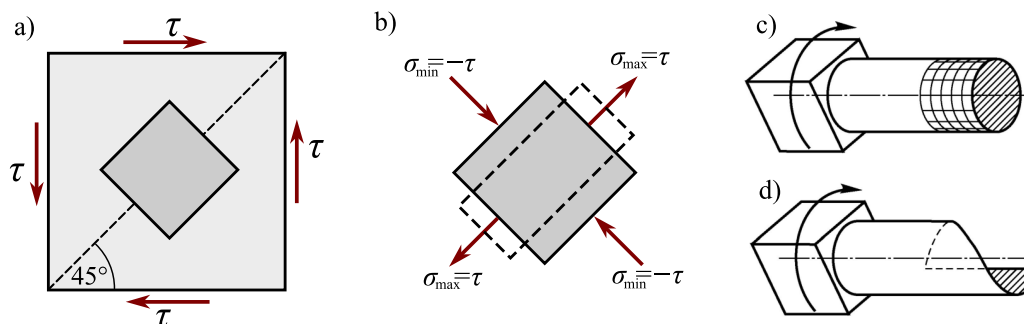
Zastępując siły w powyższym układzie iloczynami naprężeń i powierzchni, po uporządkowaniu otrzymamy wyrażenia na wartości naprężeń normalnych i stycznych na płaszczyźnie nachylonej.

$$\begin{cases} \sigma_\alpha = \tau \sin 2\alpha \\ \tau_\alpha = \tau \cos 2\alpha \end{cases}$$

Obie składowe naprężenia zmieniają się zgodnie z funkcjami trygonometrycznymi, co przedstawiono na Rys. 3. Z wykresu naprężeń normalnych widać, że jeśli na powierzchni nachylonej pod kątem α naprężenia te są dodatnie, to na powierzchni do niej prostopadłej mają znak ujemny, ale ich wartość jest taka sama. Szczególnym przypadkiem jest ten dla kąta $\alpha = 45^\circ$. Wtedy naprężenia normalne na powierzchni pochyłonej osiągają wartość maksymalną, równą naprężeniom stycznym przyłożonym do boków elementu $\sigma_{max} = \tau$, a naprężenia styczne na tej powierzchni są równe zero. Na powierzchni pochyłonej pod kątem $45^\circ \pm 90^\circ$ naprężeń stycznych również nie ma, a normalne są równe $\sigma_{min} = -\tau$, jak przedstawiono na Rys. 4b.



Rys. 3: Zmiana naprężeń na powierzchni nachylonej



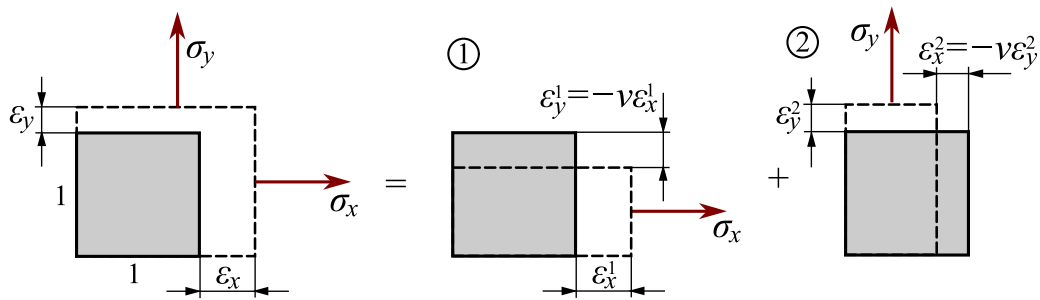
Rys. 4: Rozkład naprężeń w elemencie wału a), b); złom próbki skręcanej z materiału plastycznego c) i kruchego d)

Taki rozkład naprężeń prowadzi do szczególnych złomów próbek poddanych statycznej próbie skręcania. Jeśli próbka wykonana jest z materiału plastycznego, to przełom pojawi się w płaszczyźnie prostopadłej do osi pręta, czyli będzie efektem działania naprężeń stycznych (Rys. 4c). Jeśli materiał próbki jest kruchy, to pęknie ona wzdłuż linii śrubowej, nachylonej pod kątem 45° do osi wału, czyli w wyniku działania naprężeń rozciągających, na które materiały kruche nie są odporne (Rys. 4d).

Odształcenia

Zanim przejdziemy do analizy odkształceń wyciętego elementu wału znajdziemy zależność $\sigma \sim \varepsilon$ dla przypadku, gdy naprężenia działają w dwóch wzajemnie prostopadłych kierunkach. Taki przypadek stanu naprężeń nazywa się dwuosiowym stanem naprężeń.

Odształcenie elementarnego kwadratu o boku równym jedności, znajduje się w dwuosiowym stanie naprężeń jest wypadkową odkształceń w kierunku osi x , wywołanych naprężeniami σ_x oraz odkształceń w kierunku osi y , będących efektem naprężeń σ_y (Rys. 5). Na podstawie zachowania się pręta rozciąganego wiemy, że naprężenie wywołujące wydłużenie w jednym kierunku, powoduje zmniejszenie wymiaru w kierunku do niego prostopadłym. Zatem każde z naprężeń, σ_x i σ_y , powoduje zwiększenie wymiaru w kierunku swojego działania i zmniejszenie wymiaru w kierunku do niego prostopadłym. Całkowite odkształcenie można określić przykładając obciążenie w dwóch krokach. Najpierw rozpatruje się przypadek, gdy działa tylko naprężenie σ_x , krok pierwszy, a później, gdy działa tylko σ_y , krok drugi, co obrazuje Rys. 5. Sumując składowe odkształceń z kroku pierwszego i drugiego oraz pamiętając, że zgodnie z prawem Hooke'a dla rozciągania $\sigma_x = E\varepsilon_x$ i $\sigma_y = E\varepsilon_y$, a współczynnik Poisson'a definiuje się



Rys. 5: Wyprowadzenie prawa Hooke'a dla dwuosowego stanu naprężeń

jako $\nu = -\varepsilon_y/\varepsilon_x$, możemy zapisać

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \varepsilon_x^1 + \varepsilon_x^2 = \varepsilon_x^1 - \nu\varepsilon_y^2 = \frac{\sigma_x}{E} - \nu\frac{\sigma_y}{E} \\ \varepsilon_y = \varepsilon_y^1 + \varepsilon_y^2 = -\nu\varepsilon_x^1 + \nu\varepsilon_y^2 = -\nu\frac{\sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} \end{cases} \quad (1)$$

Rozwiązując powyższy układ ze względu na σ_x i σ_y otrzymamy

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y) \\ \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x) \end{cases} \quad (2)$$

Uzyskany wynik to prawo Hooke'a dla dwuosowego, lub inaczej płaskiego, stanu naprężeń. Znając zależność $\sigma \sim \varepsilon$ dla przypadku, gdy element obciążony jest w dwóch, wzajemnie prostopadłych kierunkach, możemy przejść do analizy elementarnego wycinka wału.

Przekątna kwadratowego elementu wału, nachylona pod kątem 45° do kierunku naprężeń stycznych, znajduje się w dwuosowym stanie naprężeń, zgodnie z Rys. 4b. Spróbujmy powiązać jej odkształcenie liniowe ε z kątem odkształcenia postaciowego γ oraz z naprężeniami stycznymi τ . Znajdziemy w ten sposób zależność między γ i τ .

Napiżmy zatem zależność na odkształcenie liniowe przekątnej definiowane jako stosunek przyrostu długości do długości początkowej. Wydłużenie przekątnej przedstawiono na Rys. 6. Zakłada się, że odkształcenia są bardzo małe, zatem funkcje trygonometryczne kątów przed i po deformacji są w przybliżeniu równe. Można zatem założyć, że kąt 45° przy wierzchołku 'C' pozostaje taki sam po deformacji.

Analizowany kwadrat ma bok o wymiarze a , zatem przekątna $l = \sqrt{2}a$. Wydłużenie przekątnej można wyznaczyć z trójkąta $CC'C''$ i będzie ono równe $\Delta l = \Delta s \cos 45^\circ$. Odkształcenie liniowe będzie wtedy równe

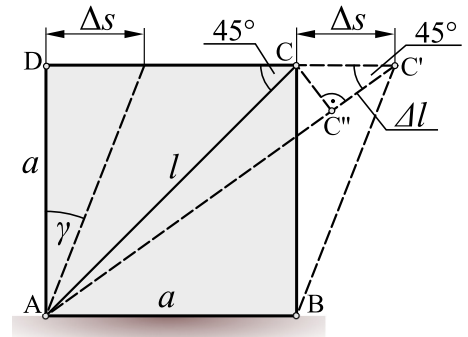
$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{\Delta s \cos 45^\circ}{\sqrt{2}a} = \frac{1}{2} \frac{\Delta s}{a} \quad (3)$$

Analizując dalej Rys. 6, pamiętając o tym, że kąt γ jest mały, możemy zapisać

$$\gamma \approx \text{tg } \gamma = \frac{\Delta s}{a} \quad (4)$$

Porównując to z zależnością (3) możemy zapisać zależność między odkształceniem liniowym i postaciowym

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\gamma. \quad (5)$$



Rys. 6: Deformacja wycinka wału

Teraz powiążmy odkształcenie z naprężeniami. Stan naprężeń w elemencie znajdującym się w stanie czystego ścinania przedstawiono na Rys. 7. Zgodnie z wcześniejszymi rozważaniami wiemy, że na powierzchniach nachylonych pod kątem 45° działają tylko naprężenia normalne o takiej samej wartości równej τ – w jednym kierunku dodatnie, w drugim ujemne. Oznaczając je odpowiednio σ_1 i σ_2 i korzystając z prawa Hooke'a dla dwuosowego stanu naprężeń (1) możemy zapisać

$$\varepsilon = \frac{\sigma_1}{E} - \nu \frac{\sigma_2}{E} = \frac{\tau}{E} + \nu \frac{\tau}{E} = \tau \frac{(1 + \nu)}{E}$$

Podstawiając zależność (5) otrzymamy

$$\tau = \frac{E}{2(1 + \nu)} \gamma, \quad (6)$$

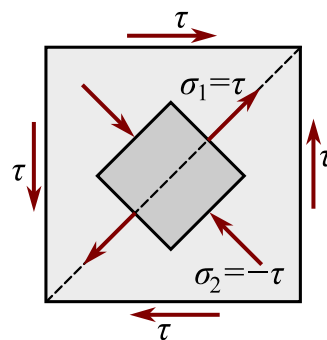
czyli poszukiwaną zależność między naprężeniami stycznymi i kątem odkształcenia postaciowego. Zależność taką otrzymuje się również z eksperymentu i ma ona postać prawa Hooke'a dla ścinania $\tau = G\gamma$. Łącząc obie zależności otrzymamy zależność między dwoma modułami

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}. \quad (7)$$

Znając moduł Younga oraz współczynnik Poisson'a dla danego materiału, możemy z powyższej zależności wyznaczyć moduł Kirchhoffa.

Literatura

1. Gorškov A.G., Trošin V.H., Šalašin V.I. *Soprotivlenie materialov*, FIZMATLIT, Moskwa, 2005
2. Gere J.M., Goodno B.J. *Mechanics of materials*, Cengage Learning, Australia, 2009



Rys. 7: Element w stanie czystego ścinania