Mechanika i Wytrzymałość Materiałów

Skręcanie

opracował:
dr hab. inż. Paweł JASION
e-mail: pawel.jasion@put.poznan.pl
www: pawel.jasion.pracownik.put.poznan.pl

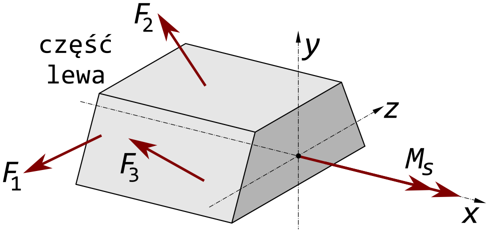
Politechnika Poznańska
Instytut Mechaniki Stosowanej
Zakład Wytrzymałości Materiałów i Konstrukcji

Plan wykładu

Plan wykładu

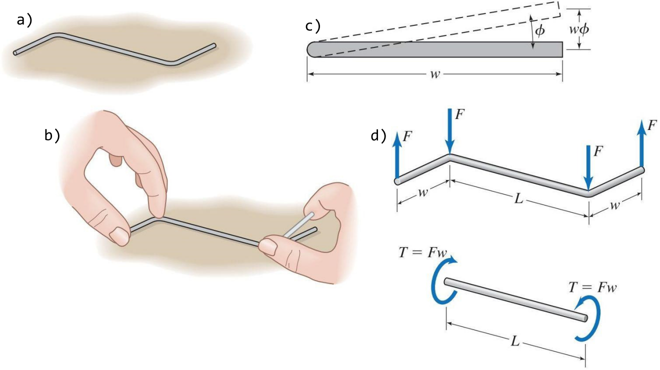
Skręcanie – definicje

- z czystym skręcaniem mamy do czynienia wtedy, gdy różna od zera jest tylko suma momentów względem osi pręta
- w przekroju poprzecznym pojawia się jedynie moment $M(x)$ oznaczany jako M_s
- pozostałe siły i momenty są równe zeru $N(x) = T(y) = T(z) = M(y) = M(z) = 0$



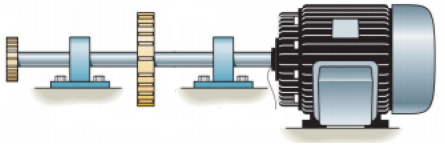
Skręcanie – idea ([Steif, 2012])

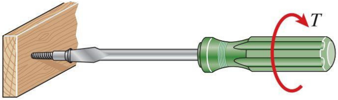
- idea czystego skręcania przedstawiona jest na poniższym rysunku; w stanie czystego skręcania znajduje się środkowa część drut o długości L

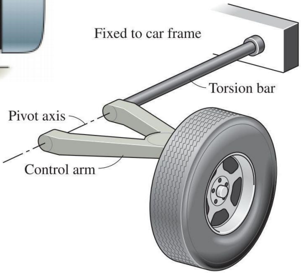


Skręcanie – przykłady ([Steif, 2012])

- przykładami elementów poddawanych skręcaniu są: wały w przekładniach, drążki skrętne w zawieszeniu samochodu, śrubokręt





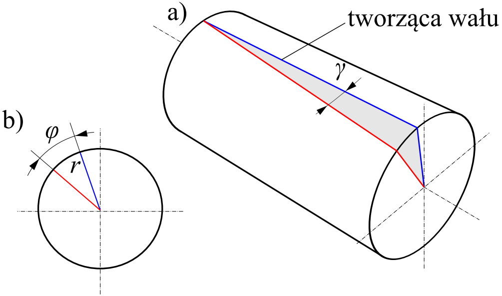


Skręcanie – definicje

Wał

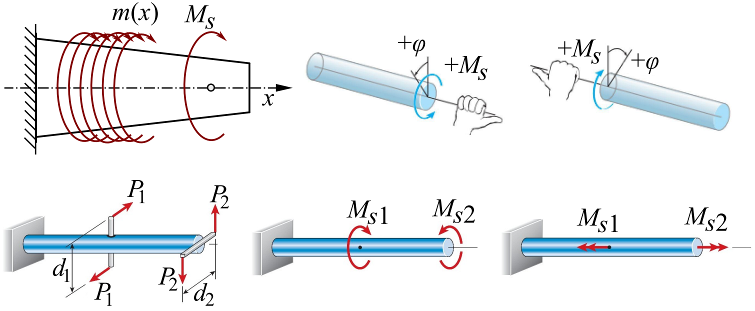
liniowy element konstrukcyjny obciążony momentem skręcającym

- φ – kąt skręcenia wału
- γ – kąt obrotu tworzącej
- r – promień wału



Skręcanie – definicje

- możliwe są dwa rodzaje obciążenia: moment przyłożony w punkcie i intensywność momentu
- konwencja znaków: określa reguła prawej dłoni

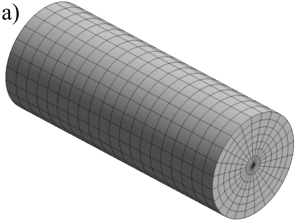


Plan wykładu

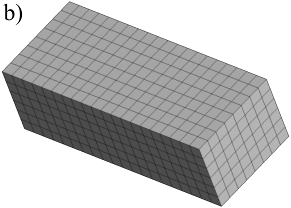
Skręcanie – deformacja

- sprawdźmy w eksperymencie, jak zachowa się element konstrukcyjny poddany skręcaniu
- rozpatrzmy element o przekroju okrągłym (a) oraz prostokątnym (b)
- na obu elementach narysujmy siatkę tworzącą kwadraty na powierzchni

a)

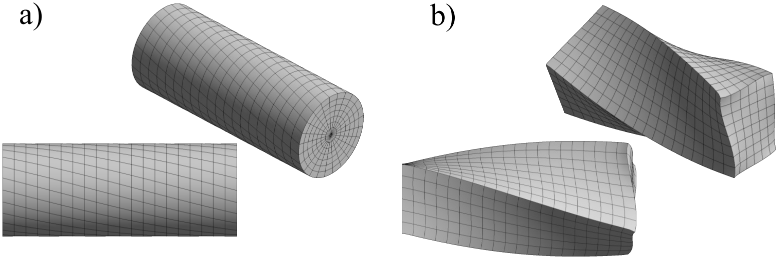


b)



Skręcanie – deformacja

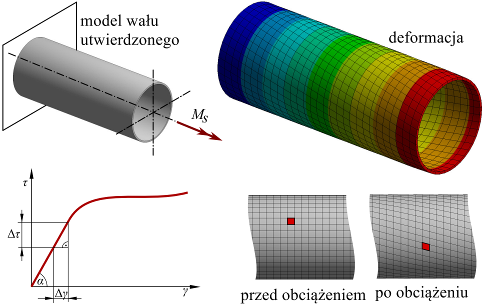
- w przypadku walca (a) widać, że jego tworzące przyjęły kształt linii śrubowej, a linie prostopadłe do osi pozostały proste; czoło pręta pozostało płaskie
- w przypadku prostokąta (b) widać, że linie prostopadłe do osi zdeformowały się, podobnie jak czoło pręta, które nie jest już płaskie



Skręcanie – deformacja

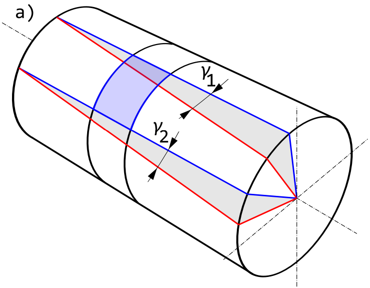
Wyniki eksperymentu

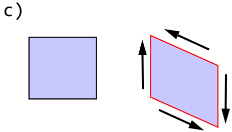
- na podstawie eksperymentu, statycznej próby skręcania, można przyjąć, że wał poddany skręcaniu znajduje się w stanie czystego ścinania – każdy z kwadratów siatki naniesionej przed eksperymentem, zamienia się w romb po deformacji wału



Deformacja wału kołowego od skręcania

Założenia

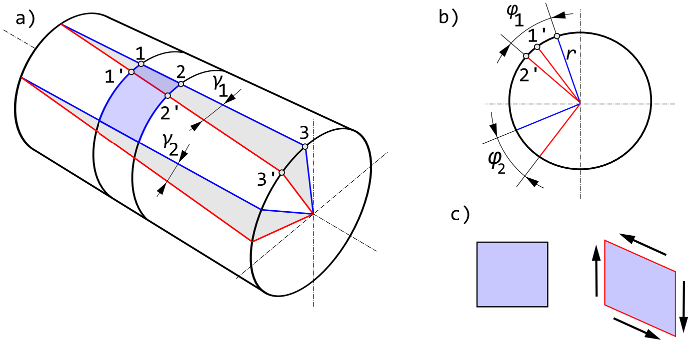




- wszystkie tworzące wału obracają się o ten sam kąt: $\gamma_1 = \gamma_2$
- wszystkie narysowane na powierzchni kwadraty zmieniają się w romby (deformacja od ścinania)

Deformacja wału kołowego od skręcania

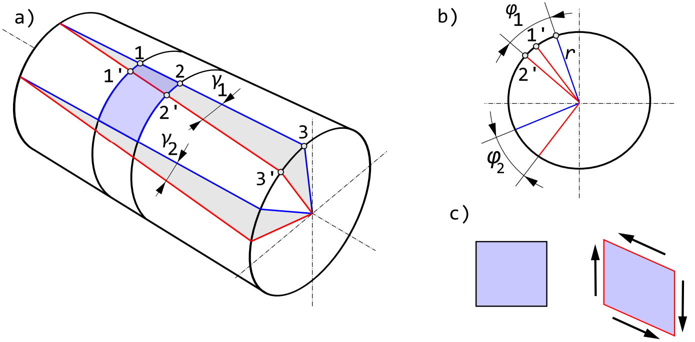
Założenia



- każdy przekrój poprzeczny obraca się względem innego przekroju o kąt skręcenia proporcjonalny do wielkości momentu skręcającego i odległości między przekrojami

Deformacja wału kołowego od skręcania

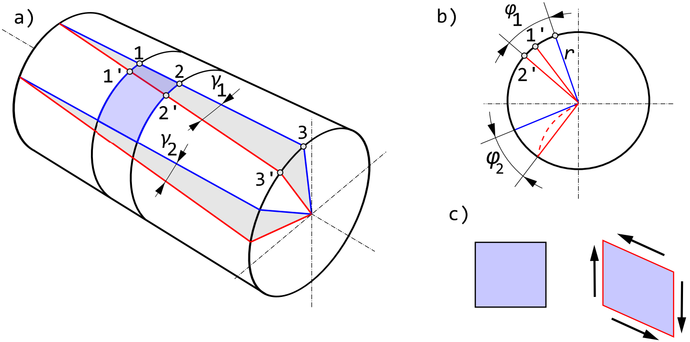
Założenia



- powierzchnie czołowe nie deformują się, a przekroje poprzeczne pozostają kołowe

Deformacja wału kołowego od skręcania

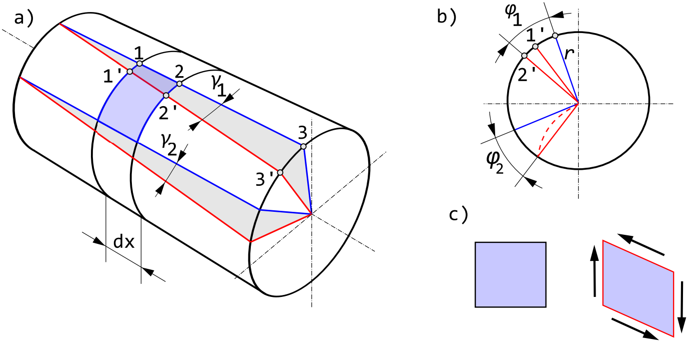
Założenia



- promienie na powierzchniach czołowych po deformacji pozostają proste i obracają się o ten sam kąt $\varphi_1 = \varphi_2$

Deformacja wału kołowego od skręcania

Założenia



- odległości między sąsiednimi przekrojami nie zmieniają się po deformacji

Hipotezy

Hipoteza płaskich przekrojów dla skręcania

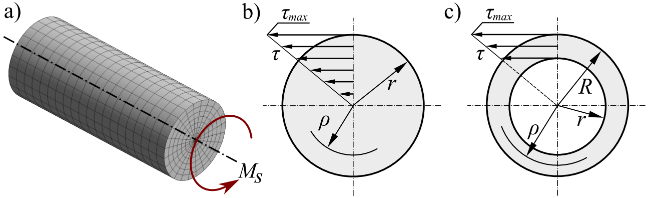
Podczas skręcania oś okrągłego pręta pozostaje prosta, a przekroje poprzeczne pozostają płaskie i prostopadłe do osi pręta zachowując się jak sztywne dyski.
Oznacza to, że ich promienie obracają się wokół osi pręta, ale nie deformują, a kąty między nimi pozostają bez zmian.

Wytrzymałość i sztywność wałów

- naprężenia styczne τ w wale skręcanym wyznacza się z zależności

$$\tau = \frac{M_s \rho}{I_0}$$

gdzie M_s jest momentem skręcającym, ρ promieniem, dla którego wyznacza się naprężenia, a I_0 biegunowym momentem bezwładności przekroju poprzecznego wału względem jego osi



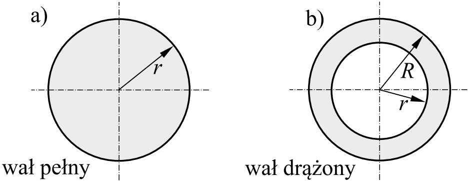
Wytrzymałość i sztywność wałów

- moment bezwładności wyznaczamy z zależności
    - dla wału pełnego

$$I_0^P = \frac{\pi r^4}{2} = \frac{\pi d^4}{32}$$

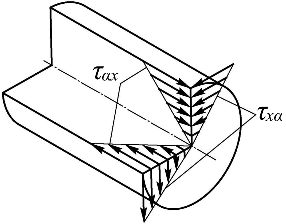
    - dla wału drążonego

$$I_0^D = \frac{\pi (R^4 - r^4)}{2} = \frac{\pi (D^4 - d^4)}{32}$$



Wytrzymałość i sztywność wałów

- zgodnie z zasadą rozkładu naprężeń przy czystym ścinaniu, naprężenia styczne pojawiają się również wzdłuż wału
- mogą one powodować pętanie wałów w kierunku wzdłużnym



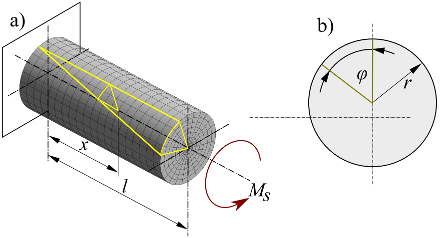
Wytrzymałość i sztywność wałów

- kąt skręcenia w dowolnym przekroju

$$\varphi(x) = \frac{M_s x}{G I_0}$$

- kąt skręcenia całego wału o długości l

$$\varphi = \frac{M_s l}{G I_0}$$



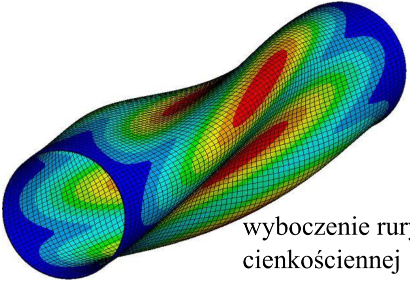
Wytrzymałość i sztywność wałów

- sztywność skrętna wału

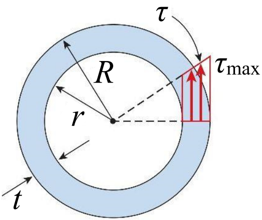
$$k_{Ms} = \frac{GI_0}{L}$$

Skręcanie wałów drążonych

- w przypadku wałów drążonych należy uważać, aby ścianki nie utraciły stateczności
- zalecenie projektowe: $(r/t)_{max} = 12$



wyboczenie rury cienkościennej



Skręcanie wałów

Ograniczenia

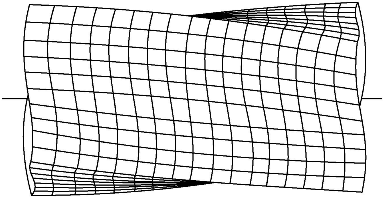
Wyprowadzone równania mogą być użyte przy następujących założeniach:

- przekrój poprzeczny wału jest okrągły (pełny lub drążony)
- materiał wału zachowuje się liniowo-sprężyście (naprężenia nie przekraczają granicy proporcjonalności)
- naprężenia analizowane są z dala od miejsc koncentracji naprężeń (otwory, podparcie, przyłożona siła)

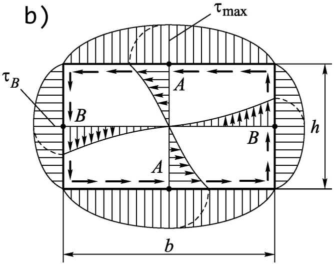
Skręcania prętów nieokrągłych

- dla przekroi nieokrągłych, rozkład naprężeń jest niejednorodny; powierzchnie czołowe deformują się
- do przybliżonego wyznaczania rozkładu naprężeń można posłużyć się analogią błonową

a)

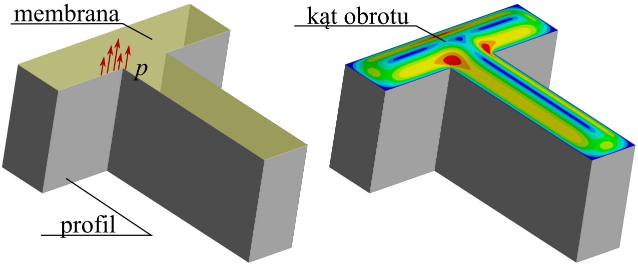


b)



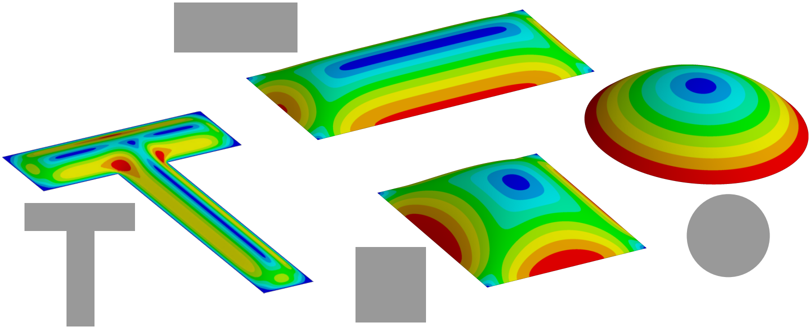
Skręcania prętów nieokrągłych

- analogia błonowa pozwala oszacować rozkład naprężeń w pręcie skręcanym o dowolnym przekroju poprzecznym
- przyjmuje się, że wartość naprężeń jest proporcjonalna do kąta obrotu membrany rozpiętej na przekroju i obciążonej jednorodnym ciśnieniem



Skręcania prętów nieokrągłych

- rozkłady konta obrotu dla wybranych przekroi poprzecznych przedstawiono poniżej



Plan wykładu

Projektowanie wałów

Ponieważ maksymalne naprężenia w wale skręcanym pojawiają się na powierzchni zewnętrznej, możemy zapisać

$$\tau = \frac{M_s r}{I_0} \quad \text{lub} \quad \tau = \frac{M_s}{W_0}$$

Wskaźnik wytrzymałości przekroju na skręcanie W_0

$$W_0 = \frac{I_0}{r} \quad [\mathrm{mm}^3]$$

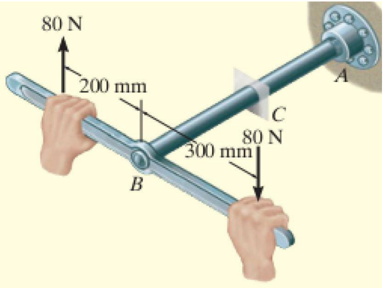
Projektując wał należy sprawdzić warunek wytrzymałości i sztywności

$$\tau_{max} \leq \tau_{dop} \;\rightarrow\; \left(\frac{M_s}{W_0}\right)_{max} \leq \frac{\sigma_{dop}}{\sqrt{3}} \quad \text{oraz} \quad \varphi_{max} \leq \varphi_{dop}$$

Jednorodny wał obciążony momentem na końcu

Przykład [Hibbeler, 2014]

Rura przedstawiona na rysunku ma średnicę wewnętrzną równą 40 mm i zewnętrzną równą 50 mm. Zakładając, że koniec jest dokręcony w punkcie A momentem wywołanym przez klucz w punkcie B, wyznaczyć naprężenia styczne, jakie powstają w materiale na ściance zewnętrznej w środkowej części rury.



Skręcanie niejednorodne

Aby rozwiązać zagadnienie skręcania niejednorodnego należy:

- podzielić wał na odcinki; podziału dokonujemy w miejscach przyłożenia momentu, zmiany średnicy, zmiany materiału
- wykonujemy wykres sił wewnętrznych, a na podstawie tych sił wykres naprężeń
- określamy kąt skręcenia wału w dowolnym punkcie, korzystając z addytywności kątów skręcenia poszczególnych fragmentów

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{M_{si} l_i}{G_i I_{0i}}$$

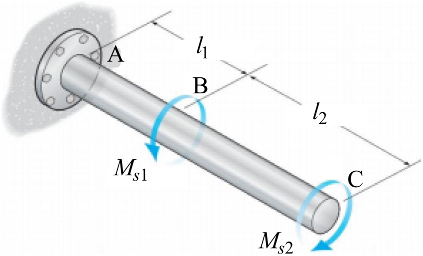
Wał obciążony wieloma momentami

Przykład [Hibbeler, 2014]

Stalowy wał poddany jest skręcaniu.

a) wyznaczyć kąt obrotu końca C w stosunku do punktu A; przyjąć $G = 75$ GPa, $d = 60$ mm

b) zakładając $\tau_{dop} = 30$ MPa określić minimalną średnicę wału



$M_{s1} = 5$ kNm

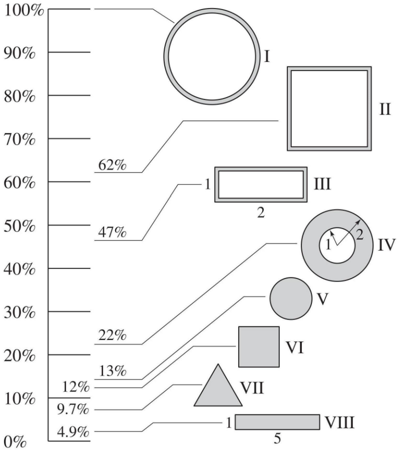
$M_{s2} = 3$ kNm

$l_1 = 400$ mm

$l_2 = 600$ mm

Porównanie sztywności przekrojów ([Steif, 2012])

- przy założeniu stałego pola przekroju, największą sztywność wykazują przekroje cienkościenne

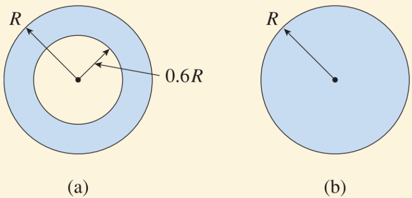


Porównanie sztywności przekrojów

Przykład [Gere & Goodno, 2009]

Wały drążony i pełny są wykonane z tego samego materiału, mają tą samą długość i ten sam promień zewnętrzny R. Wewnętrzny promień wału drążonego jest równy $0,6R$.

Zakładając, że oba wały obciążone są takim samym momentem skręcającym M_s, porównać pojawiające się w nich naprężenia styczne, kąty obrotu i masy

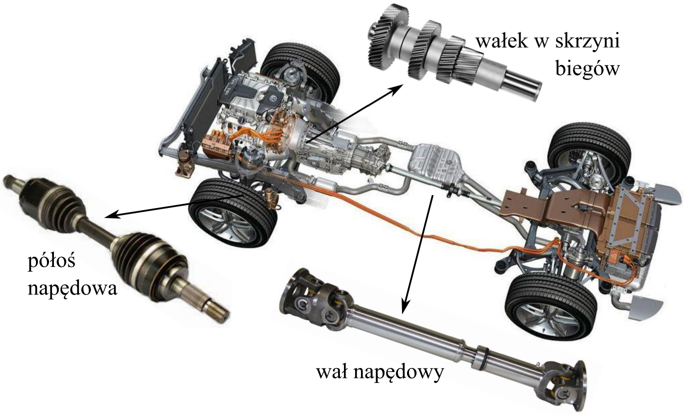


Plan wykładu

Przenoszenie napędu

Elementy przenoszące napęd

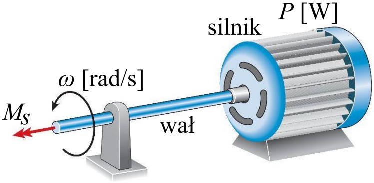
- wały są często elementami maszyn przenoszącymi moc wytwarzaną przez maszynę



Przenoszenie napędu

Przy rozwiązywaniu zadań związanych z przenoszeniem napędu korzystamy z następujących zależności:

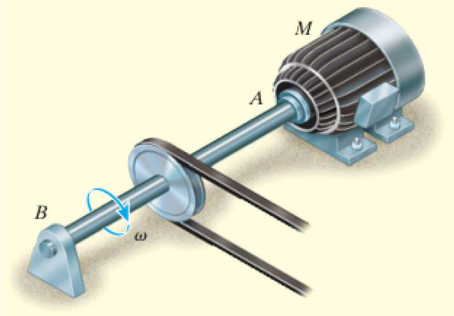
- moc: $P = M_s\omega$
- prędkość obrotowa: $\omega = \dfrac{\pi n}{30}$
- moment skręcający: $M_s = \dfrac{9549P}{n}$ [Nm]
- 1 KM=0,735 kW



Przenoszenie momentu

Przykład

Pełny wał AB podłączony do silnika M ma przenosić moc 5 KM. Przyjmując prędkość obrotową wału $n = 175$ obr/min oraz naprężenia dopuszczalne dla stali $\tau_{dop} = 25$ MPa, wyznaczyć minimalną wymaganą średnicę wału.



Plan wykładu

Energia odkształcenia sprężystego

Dla przypadku skręcanego pręta pryzmatycznego mamy:

$$U = \frac{1}{2} M_s \varphi$$

Wiemy, że:

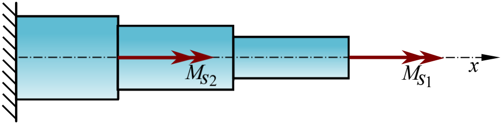
$$\varphi = \frac{M_s l}{G I_0}$$

Zatem ostatecznie:

$$U = \frac{M_s^2 l}{2 G I_0}$$

Energia odkształcenia nie jest liniową funkcją obciążenia

Energia odkształcenia prętów niepryzmatycznych

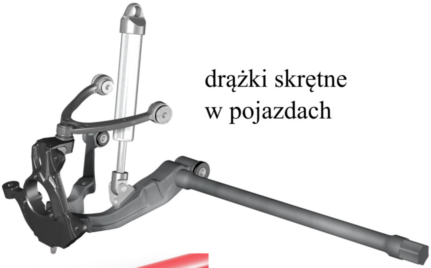


Energia odkształcenia sprężystego, dla przypadku pręta złożonego z wielu segmentów, jest sumą energii zgromadzoną w poszczególnych segmentach, liczoną przy obciążeniu wszystkimi momentami

$$U = \sum_{i=1}^{n} U_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{M_{si}^2 l_i}{G_i I_{0i}}$$

Energia odkształcenia sprężystego

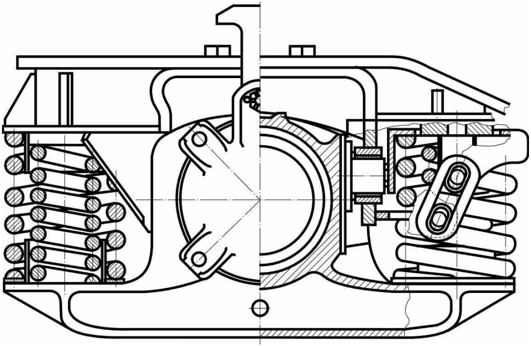
Zastosowania



drążki skrętne
w pojazdach

sprężyny

Zastosowanie walcowych sprężyn śrubowych



Bibliografia

Gere J.M., Goodno B.J.
Mechanics of materials
Cengage Learning, Australia, 2009

Hibbeler, R.C.
Statics and Mechanics of Materials
Pearson, New York, 2014

Steif, P.S.
Mechanics of Materials
Pearson, New York, 2012