

Wytrzymałość Materiałów I

Skrećanie

opracował:

dr hab. inż. Paweł JASION

e-mail: `pawel.jasion@put.poznan.pl`

www: `pawel.jasion.pracownik.put.poznan.pl`

Politechnika Poznańska

Instytut Mechaniki Stosowanej

Zakład Wytrzymałości Materiałów i Konstrukcji

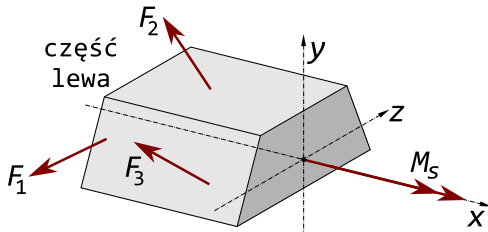
- 1 Definicja i przykłady czystego skręcania
- 2 Zależności statyczne, geometryczne i fizyczne
- 3 Obliczanie wałów
- 4 Przenoszenie napędu
- 5 Energia odkształcenia sprężystego

Plan wykładu

- 1 Definicja i przykłady czystego skręcania
- 2 Zależności statyczne, geometryczne i fizyczne
- 3 Obliczanie wałów
- 4 Przenoszenie napędu
- 5 Energia odkształcenia sprężystego

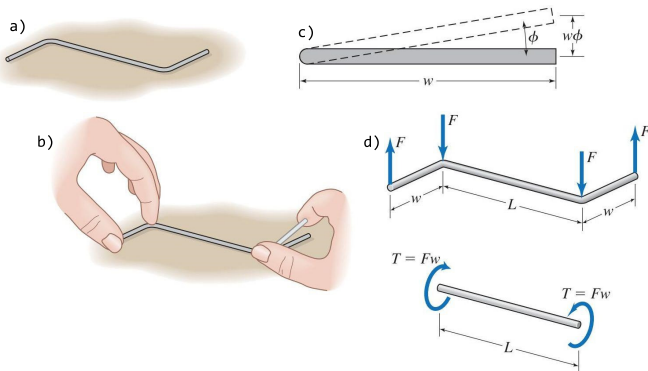
Skręcanie – definicje

- z czystym skręcaniem mamy do czynienia wtedy, gdy różna od zera jest tylko suma momentów względem osi pręta
- w przekroju poprzecznym pojawia się jedynie moment $M(x)$ oznaczany jako M_s
- pozostałe siły i momenty są równe zero
 $N(x) = T(y) = T(z) = M(y) = M(z) = 0$



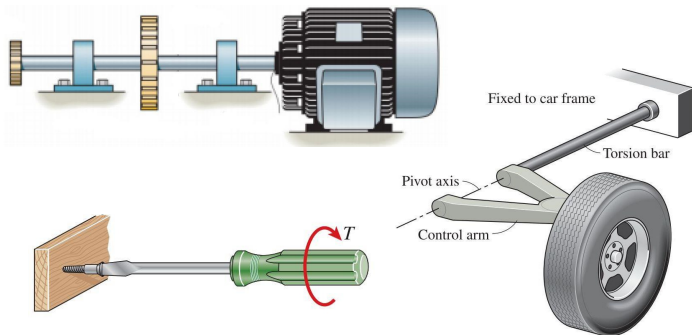
Skrećanie – idea ([Steif, 2012])

- idea czystego skręcania przedstawiona jest na poniższym rysunku; w stanie czystego skręcania znajduje się środkowa część drut o długości L



Skrećanie – przykłady ([Steif, 2012])

- przykładami elementów poddawanych skręcaniu są: wały w przekładniach, drążki skrętne w zawieszeniu samochodu, śrubokręt

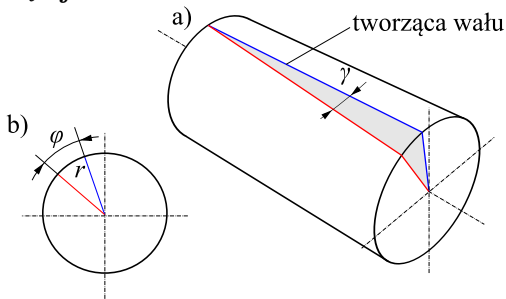


Skrećanie – definicje

Wał

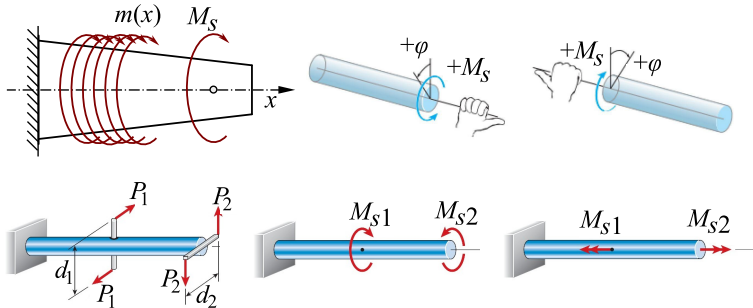
liniowy element konstrukcyjny obciążony momentem skręcającym

- φ – kąt skręcenia wału
- γ – kąt obrotu tworzącej
- r – promień wału



Skręcanie – definicje

- możliwe są dwa rodzaje obciążenia: moment przyłożony w punkcie i intensywność momentu
- konwencja znaków: określa reguła prawej dłoni

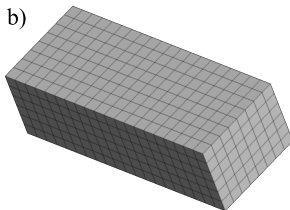
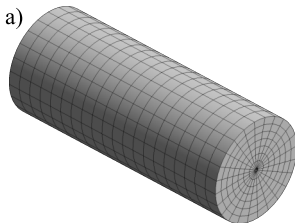


Plan wykładu

- 1 Definicja i przykłady czystego skręcania
- 2 Zależności statyczne, geometryczne i fizyczne**
- 3 Obliczanie wałów
- 4 Przenoszenie napędu
- 5 Energia odkształcenia sprężystego

Skrećanie – deformacja

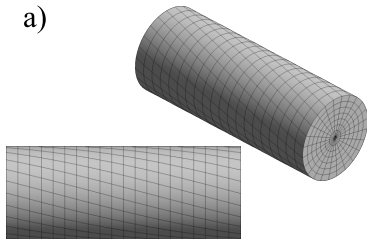
- sprawdzimy w eksperymencie, jak zachowa się element konstrukcyjny poddany skrećaniu
- rozpatrzmy element o przekroju okrągłym (a) oraz prostokątnym (b)
- na obu elementach narysujmy siatkę tworzącą kwadraty na powierzchni



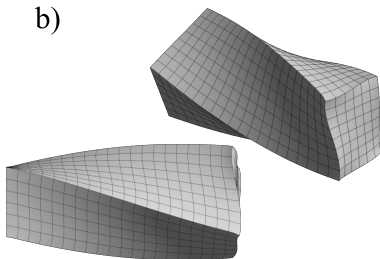
Skrećanie – deformacja

- w przypadku walca (a) widać, że jego tworzące przyjęły kształt linii śrubowej, a linie prostopadłe do osi pozostały proste; czoło pręta pozostało płaskie
- w przypadku prostokąta (b) widać, że linie prostopadłe do osi zdeformowały się, podobnie jak czoło pręta, które nie jest już płaskie

a)



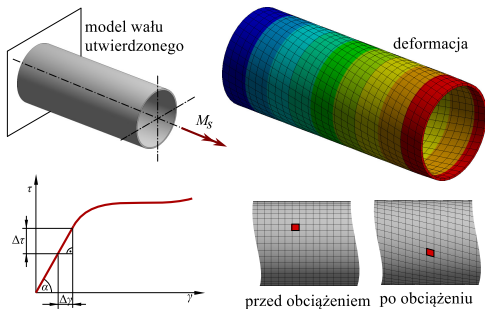
b)



Skrećanie – deformacja

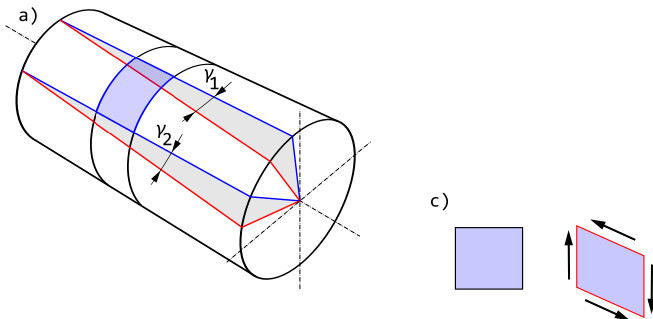
Wyniki eksperymentu

- na podstawie eksperymentu, statycznej próby skrećania, można przyjąć, że wał poddany skrećaniu znajduje się w stanie czystego ścinania – każdy z kwadratów siatki naniesionej przed eksperymentem, zamienia się w romb po deformacji wału



Deformacja wału kołowego od skręcania

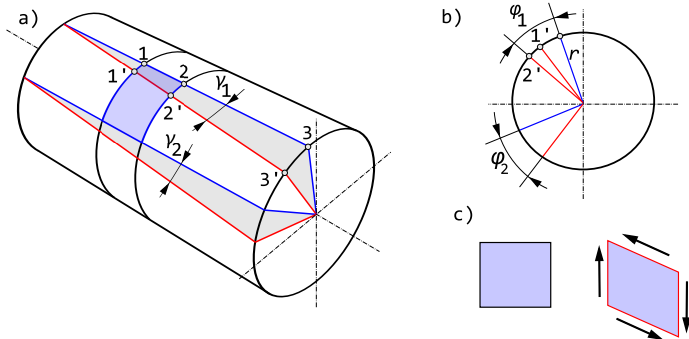
Założenia



- wszystkie tworzące wału obracają się o ten sam kąt:
 $\gamma_1 = \gamma_2$
- wszystkie narysowane na powierzchni kwadraty zmieniają się w romby (deformacja od ścinania)

Deformacja wału kołowego od skręcania

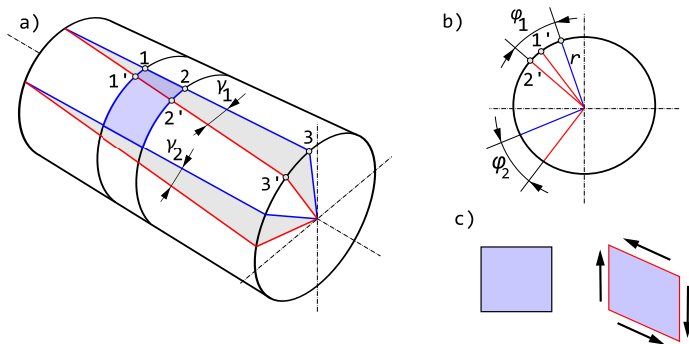
Założenia



- każdy przekrój poprzeczny obraca się względem innego przekroju o kąt skręcenia proporcjonalny do wielkości momentu skręcającego i odległości między przekrojami

Deformacja wału kołowego od skręcania

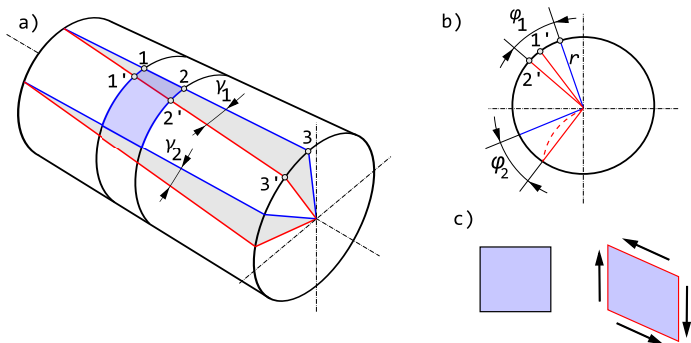
Założenia



- powierzchnie czołowe nie deformują się, a przekroje poprzeczne pozostają kołowe

Deformacja wału kołowego od skręcania

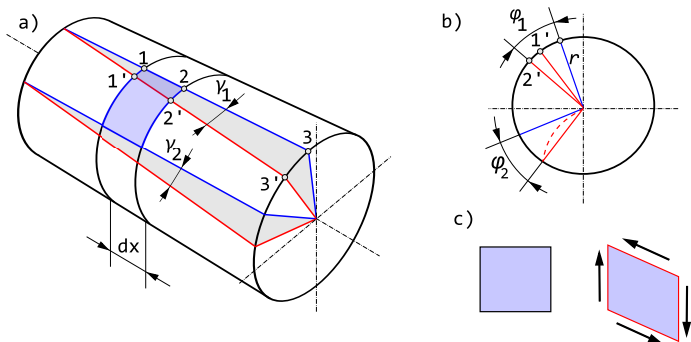
Założenia



- promienie na powierzchniach czołowych po deformacji pozostają proste i obracają się o ten sam kąt $\varphi_1 = \varphi_2$

Deformacja wału kołowego od skręcania

Założenia



- odległości między sąsiednimi przekrojami nie zmieniają się po deformacji

Hipotezy

Hipoteza płaskich przekrojów dla skręcania

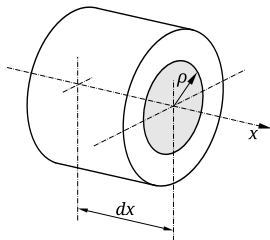
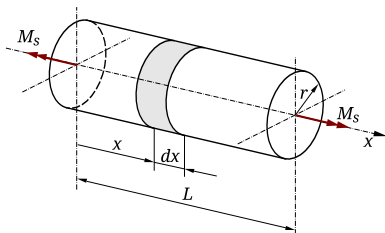
Podczas skręcania oś okrągłego pręta pozostaje prosta, a przekroje poprzeczne pozostają płaskie i prostopadłe do osi pręta zachowując się jak sztywne dyski.

Oznacza to, że ich promienie obracają się wokół osi pręta, ale nie deformują, a kąty między nimi pozostają bez zmian.

Zależności geometryczne – $\theta \sim \varphi(x)$

Odształcenia w wale

- wał pryzmatyczny o przekroju kołowym obciążony jest momentem M_s
- wycinamy fragment wału o długości dx w odległości x od początku wału, a następnie walec o promieniu ρ

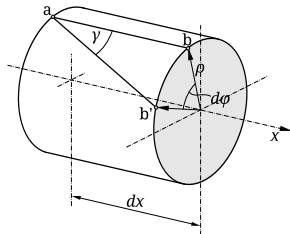


Zależności geometryczne – $\theta \sim \varphi(x)$

Odształcenia w wale

- po odkształceniu punkt b przemieści się w położenie b'
- długość łuku można zdefiniować z jednej strony jako $\rho\varphi$, a z drugiej jako γdx
- przyrównując obie wielkości otrzymamy zależność na kąt γ jako funkcję kąta skręcenia

$$\gamma = \rho \frac{d\varphi}{dx}$$



- kąt γ zmienia się zatem liniowo od wartości zerowej w osi wału do wartości maksymalnej dla $\rho = r$; zatem jest największy na powierzchni wału

Zależności geometryczne – $\theta \sim \varphi(x)$

Odształcenia w wale

- dla dowolnego miejsca wału

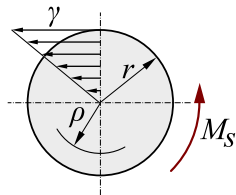
$$\gamma = \rho \frac{d\varphi}{dx} = \rho\theta \quad (\text{gdzie } \theta = \frac{d\varphi}{dx} - \text{intensywność skręcenia})$$

- dla powierzchni zewnętrznej

$$\gamma_{max} = r \frac{d\varphi}{dx}$$

- dla całego wału

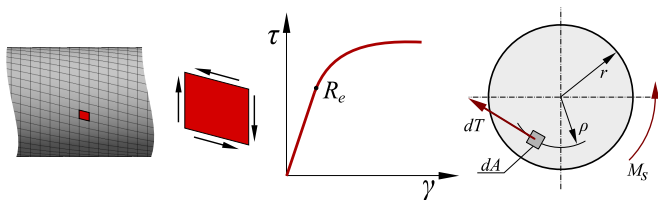
$$\gamma_{max} = r \frac{\varphi}{L}$$



Zależności fizyczne – $\tau \sim \gamma$

- aby wyznaczyć zależność na naprężenia, przyjmiemy założenia wynikające z eksperymentu oraz zdefiniujemy elementarny moment na przekroju wału
- zgodnie z prawem Hooke'a dla ścinania mamy $\tau = G\gamma$; podstawiając uzyskaną wcześniej zależność na γ mamy

$$\tau = G\rho \frac{d\varphi}{dx}$$



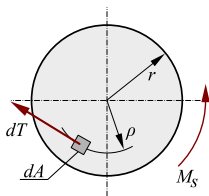
Zależności fizyczne – $\tau \sim \gamma$

- elementarny moment dM jest równy elementarnej sile dT pomnożonej przez ramię, czyli promień ρ
- ponieważ siła jest równa naprężeniom rozłożonym na powierzchni mamy

$$dM_s = dT \rho = \tau \rho dA$$

- podstawiając poprzednie wyrażenie na τ otrzymamy po scałkowaniu

$$M_s = G \frac{d\varphi}{dx} \int_A \rho^2 dA$$



Zależności fizyczne – $\tau \sim \gamma$

- całka w powyższym wyrażeniu jest biegunowym momentem bezwładności, możemy zatem zapisać

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_s}{GI_0}$$

- porównując to z wyrażeniem

$$\tau = G\rho \frac{d\varphi}{dx}$$

- otrzymamy wzór na naprężenia styczne przy skręcaniu

$$\tau = \frac{M_s\rho}{I_0}$$

Skreślenie wału

- wracając do poniższego wyrażenia, możemy wyznaczyć kąt skreślenia wału

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_s}{GI_0} \rightarrow d\varphi = \frac{M_s}{GI_0} dx$$

- całkując stronami otrzymamy

$$\varphi(x) = \frac{M_s x}{GI_0}$$

- powyższe wyrażenie pozwala wyznaczyć kąt skreślenia dowolnego przekroju wału

Wytrzymałość i sztywność wałów

- naprężenia styczne

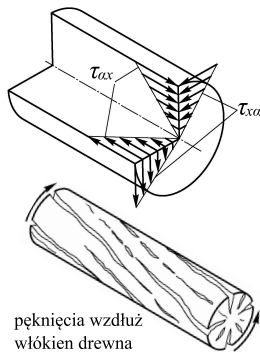
$$\tau = \frac{M_s \rho}{I_0}$$

- kąt skręcenia w dowolnym przekroju

$$\varphi(x) = \frac{M_s x}{GI_0}$$

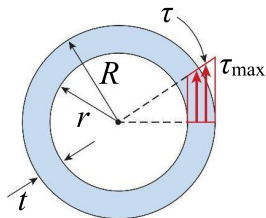
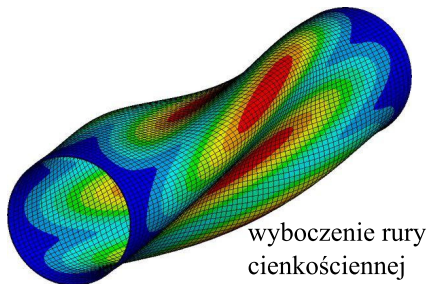
- sztywność skrętna

$$k_{M_s} = \frac{GI_0}{L}$$



Skrećanie wałów drążonych

- w przypadku wałów drążonych należy uważać, aby ścianki nie utraciły stateczności
- zalecenie projektowe: $(r/t)_{max} = 12$



Skrećanie wałów

Ograniczenia

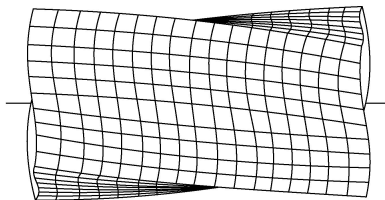
Wyprowadzone równania mogą być użyte przy następujących założeniach:

- przekrój poprzeczny wału jest okrągły (pełny lub drażony)
- materiał wału zachowuje się liniowo-sprężyste (naprężenia nie przekraczają granicy proporcjonalności)
- naprężenia analizowane są z dala od miejsc koncentracji naprężeń (otwory, podparcie, przyłożona siła)

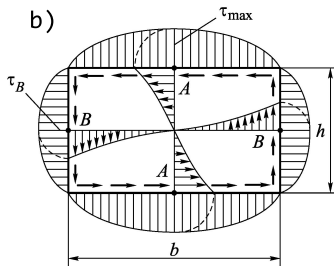
Skrećania prętów nieokrągłych

- dla przekroji nieokrągłych, rozkład naprężeń jest niejednorodny; powierzchnie czołowe deformują się
- do przybliżonego wyznaczenia rozkładu naprężeń można posłużyć się **analogią błonową**

a)

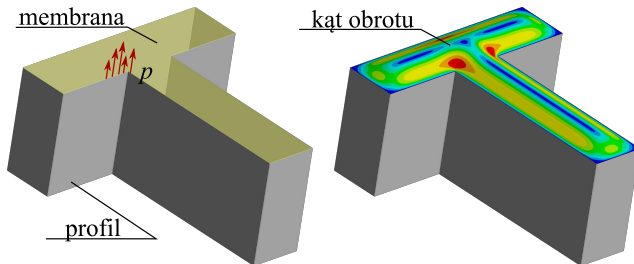


b)



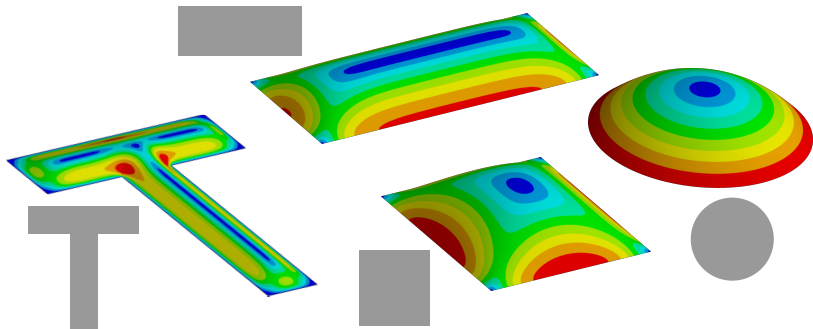
Skrećania prętów nieokrągłych

- analogia błonowa pozwala oszacować rozkład naprężeń w pręcie skrećanym o dowolnym przekroju poprzecznym
- przyjmuje się, że wartość naprężeń jest proporcjonalna do kąta obrotu membrany rozpiętej na przekroju i obciążonej jednorodnym ciśnieniem



Skrećania prętów nieokrągłych

- rozkłady kąta obrotu dla wybranych przekroji poprzecznych przedstawiono poniżej



Plan wykładu

- 1 Definicja i przykłady czystego skręcania
- 2 Zależności statyczne, geometryczne i fizyczne
- 3 Obliczanie wałów**
- 4 Przenoszenie napędu
- 5 Energia odkształcenia sprężystego

Projektowanie wałów

Ponieważ maksymalne naprężenia w wale skręcanym pojawiają się na powierzchni zewnętrznej, możemy zapisać

$$\tau = \frac{M_s r}{I_0} \quad \text{lub} \quad \tau = \frac{M_s}{W_0}$$

Wskaźnik wytrzymałości przekroju na skręcanie W_0

$$W_0 = \frac{I_0}{r} \quad [\text{mm}^3]$$

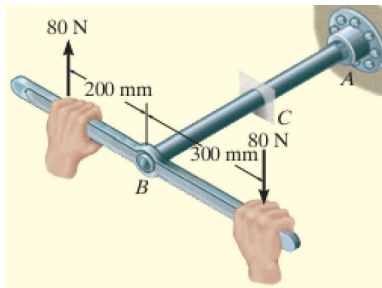
Projektując wał należy sprawdzić warunek wytrzymałości i sztywności

$$\tau_{max} \leq \tau_{dop} \rightarrow \left(\frac{M_s}{W_0} \right)_{max} \leq \frac{\sigma_{dop}}{\sqrt{3}} \quad \text{oraz} \quad \varphi_{max} \leq \varphi_{dop}$$

Jednorodny wał obciążony momentem na końcu

Przykład [Hibbeler, 2014]

Rura przedstawiona na rysunku ma średnicę wewnętrzną równą 40 mm i zewnętrzną równą 50 mm. Zakładając, że koniec jest dokręcony w punkcie A momentem wywołanym przez klucz w punkcie B, wyznaczyć naprężenia styczne, jakie powstają w materiale na ścianie zewnętrznej w środkowej części rury.



Skrećanie niejednorodne

Aby rozwiązać zagadnienie skrećania niejednorodnego należy:

- podzielić wał na odcinki; podziału dokonujemy w miejscach przyłożenia momentu, zmiany średnicy, zmiany materiału
- wykonujemy wykres sił wewnętrznych, a na podstawie tych sił wykres naprężeń
- określamy kąt skrećania wału w dowolnym punkcie, korzystając z addytywności kątów skrećania poszczególnych fragmentów

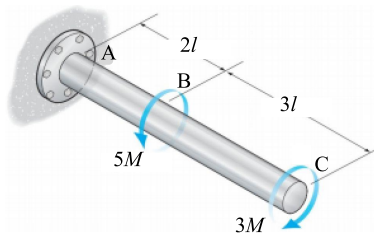
$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n = \sum_{i=1}^n \varphi_i = \sum_{i=1}^n \frac{M_{si} l_i}{G_i I_{0i}}$$

Wał obciążony wieloma momentami

Przykład [Hibbeler, 2014]

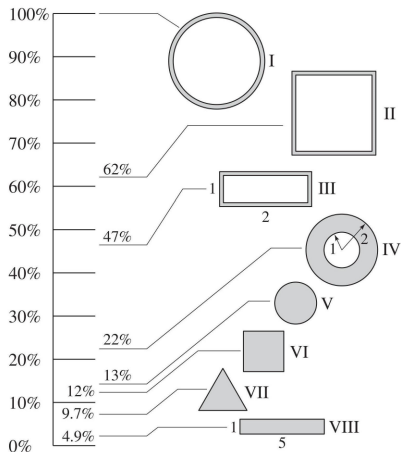
Stalowy wał poddany jest skręcaniu.

- wyznaczyć kąt obrotu końca C w stosunku do punktu A; przyjąć moduł Kirchhoffa równy G oraz średnicę równą d
- zakładając τ_{dop} określić minimalną średnicę wału



Porównanie sztywności przekrojów ([Steif, 2012])

- przy założeniu stałego pola przekroju, największą sztywność wykazują przekroje cienkościennie

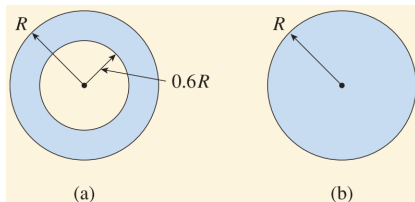


Porównanie sztywności przekrojów

Przykład [Gere & Goodno, 2009]

Wały drażony i pełny są wykonane z tego samego materiału, mają tę samą długość i ten sam promień zewnętrzny R . Wewnętrzny promień wału drażonego jest równy $0,6R$.

- zakładając, że oba wały obciążone są takim samym momentem skręcającym M_s , porównać pojawiające się w nich naprężenia styczne, kąty obrotu i masy
- dla obu wałów określić wskaźnik „wytrzymałość-do-masy” ($M_{s,dop}/m$)



Rozwiązywanie zadań statycznie niewyznaczalnych

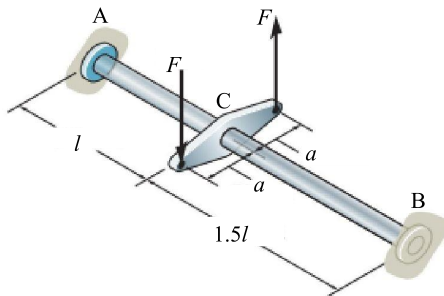
W celu rozwiązania zadania statycznie niewyznaczalnego należy:

- zapisać równanie równowagi $\sum M_s = 0$
- zapisać równanie zgodności (równanie geometryczne) pokazujące zgodność kątów obrotów z warunkami podparcia
- zapisać równanie moment-kąt obrotu, tzn. wyrazić równanie zgodności jako funkcję nieznanymi momentów

Wał utwierdzony na obu końcach

Przykład [Hibbeler, 2014]

Stalowy wał o średnicy $d = 40$ mm utwierdzony jest na obu końcach. Wyznaczyć rozkład naprężeń wzdłuż wału oraz skręcenie w punkcie C. Przyjąć $G = 75$ GPa, $l = 400$ mm, $a = 50$ mm, $F = 3$ kN.



Wał kompozytowy

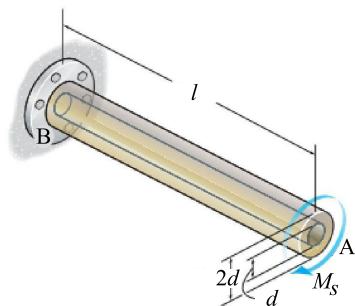
- sposobem na zwiększenie funkcjonalności wału jest zaprojektowanie go, jako konstrukcję kompozytową
- wał kompozytowy składa się z co najmniej dwóch różnych materiałów
- zaletą takich wałów jest
 - możliwość użycia jako rdzenia, w strefie małych naprężeń, materiału lekkiego, co zmniejsza masę wału, przy nieznacznym spadku sztywności
 - usztywnienie wału cienkościennego – rdzeń przeciwdziała wyboczeniu
 - obniżenie ceny wału



Wał kompozytowy

Przykład [Hibbeler, 2014]

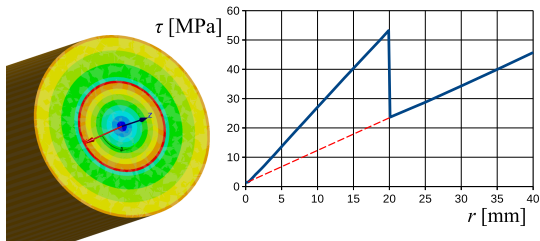
Rura ze stopu magnezu połączona jest z prętem stalowym. W punkcie A przyłożony jest moment skręcający $M_s = 5 \text{ kNm}$. Przedstawić rozkład maksymalnych naprężeń tnących na przekroju wału. Przyjąć: $G_{st} = 75 \text{ GPa}$, $G_{mg} = 30 \text{ GPa}$, $l = 900 \text{ mm}$, $d = 40 \text{ mm}$.



Wał kompozytowy

Przykład [Hibbeler, 2014]

- rozwiązanie metodą elementów skończonych (w nawiasie rozwiązanie analityczne)
 - $\tau_{max}^{st} = 53,2 \text{ MPa}$ (56,8 MPa)
 - $\tau_{min}^{mg} = 23,7 \text{ MPa}$ (22,7 MPa)
 - $\tau_{max}^{mg} = 45,7 \text{ MPa}$ (45,5 MPa)



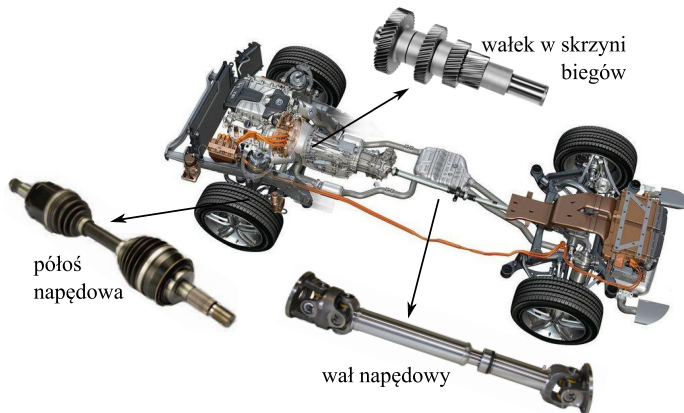
Plan wykładu

- 1 Definicja i przykłady czystego skręcania
- 2 Zależności statyczne, geometryczne i fizyczne
- 3 Obliczanie wałów
- 4 Przenoszenie napędu**
- 5 Energia odkształcenia sprężystego

Przenoszenie napędu

Elementy przenoszące napęd

- wały są często elementami maszyn przenoszącymi moc wytwarzaną przez maszynę



Przenoszenie napędu

- wały są obciążone momentem skręcającym M_s zależnym od mocy P wytwarzanej przez maszynę oraz prędkości obrotowej ω wału
- praca wykonana przez moment skręcający M_s jest równa iloczynowi tego momentu i kąta obrotu ψ

$$W = M_s \psi$$

- moc jest pracą wykonaną w czasie

$$P = \frac{dW}{dt} = M_s \frac{d\psi}{dt}$$

- zmiana kąta obrotu w czasie to prędkość kątowna ω

$$\frac{d\psi}{dt} = \omega$$

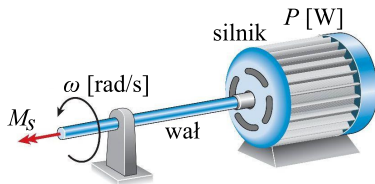
- zatem

$$P = M_s \omega \quad [\text{W}]$$

Przenoszenie napędu

Przy rozwiązywaniu zadań związanych z przenoszeniem napędu korzystamy z następujących zależności:

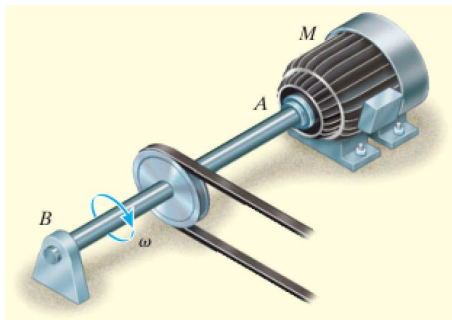
- moc: $P = M_s \omega$
- prędkość obrotowa: $\omega = \frac{\pi n}{30}$
- moment skręcający: $M_s = \frac{9549P}{n}$ [Nm]
- 1 KM=0,735 kW



Przenoszenie momentu

Przykład

Pełny wał AB podłączony do silnika M ma przenosić moc 5 KM. Przyjmując prędkość obrotową wału $n = 175$ obr/min oraz naprężenia dopuszczalne dla stali $\tau_{dop} = 25$ MPa, wyznaczyć minimalną wymaganą średnicę wału.



Plan wykładu

- 1 Definicja i przykłady czystego skręcania
- 2 Zależności statyczne, geometryczne i fizyczne
- 3 Obliczanie wałów
- 4 Przenoszenie napędu
- 5 Energia odkształcenia sprężystego**

Energia odkształcenia sprężystego

Dla przypadku skręcanego pręta pryzmatycznego mamy:

$$U = \frac{1}{2}M_s\varphi$$

Wiemy, że:

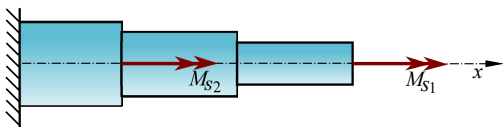
$$\varphi = \frac{M_s l}{GI_0} \quad \text{lub} \quad M_s = \frac{\varphi GI_0}{l}$$

Zatem ostatecznie:

$$U = \frac{M_s^2 l}{2GI_0} \quad \text{lub} \quad U = \frac{(\varphi)^2 GI_0}{2l}$$

Energia odkształcenia nie jest liniową funkcją obciążenia

Energia odkształcenia prętów niepryzmatycznych



Energia odkształcenia sprężystego, dla przypadku pręta złożonego z wielu segmentów, jest sumą energii zgromadzoną w poszczególnych segmentach, liczoną przy obciążeniu wszystkimi momentami

$$U = \sum_{i=1}^n U_i = \sum_{i=1}^n \frac{M_{si}^2 l_i}{G_i I_{0i}}$$

Gęstość energii odkształcenia u

Gęstość energii odkształcenia

energia odkształcenia odniesiona do objętości elementu konstrukcyjnego

$$u = \frac{U}{V}$$

Dla przypadku czystego ścinania mamy:

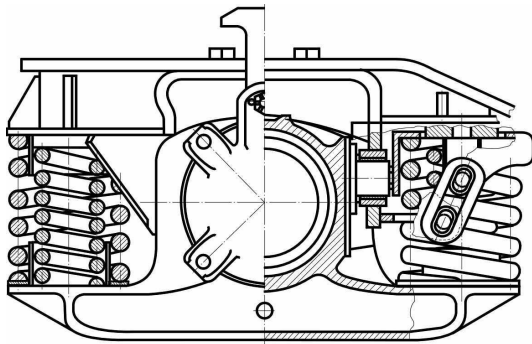
$$u = \frac{U}{V} = \frac{\tau^2}{2G}$$

Energia odkształcenia sprężystego

Zastosowania



Zastosowanie walcowych sprężyn śrubowych



Bibliografia



Gere J.M., Goodno B.J.
Mechanics of materials
Cengage Learning, Australia, 2009



Hibbeler, R.C.
Statics and Mechanics of Materials
Pearson, New York, 2014



Steif, P.S.
Mechanics of Materials
Pearson, New York, 2012