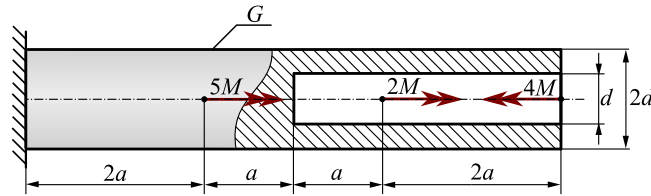


## Wał drążony, obciążony nierównomiernie

### Przykład

Dla wału drążonego przedstawionego na Rys. 1, obciążonego układem momentów skręcających, wyznaczyć wartości sił wewnętrznych i naprężeń w poszczególnych przekrojach. Sporządzić wykres kąta obrotu poszczególnych przekroji wału.

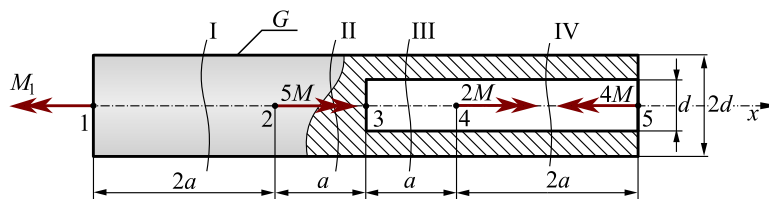


Rys. 1: Wał drążony obciążony nierównomiernie

W pierwszej kolejności wprowadzamy układ współrzędnych, oś  $x$ , oraz oznaczenia punktów charakterystycznych i uwalniamy układ od więzów. W tym przypadku pojawi się tylko jedna reakcja  $M_1$  w utwierdzeniu. Z równania równowagi momentów skręcających względem osi  $x$  (Rys. 2) wyznaczamy wartość reakcji

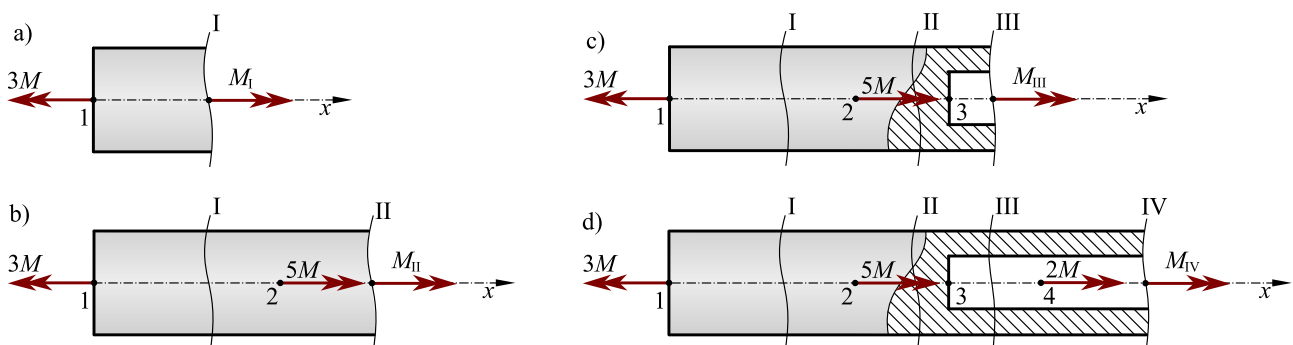
$$\sum M_x = -M_1 + 5M + 2M - 4M = 0 \quad \text{stad} \quad M_1 = 3M$$

Następnie definiujemy w wale przedziały zmienności. Zgodnie z Rys. 2 będą cztery takie przedziały. Aby



Rys. 2: Wał drążony obciążony nierównomiernie

wyznaczyć siły wewnętrzne w wale, wewnątrz każdego przedziału dokonujemy przekroju myślowego. Rozpoczynamy od przedziału pierwszego, między punktami 1-2, oznaczonego jako I. Odrzucamy prawą część wału, a pozostałą część rysujemy wraz z obciążeniem jakie pozostało. Na przekroju wprowadzamy siłę wewnętrzną  $M_I$  skierowaną od przekroju. Schemat przedstawiony jest na Rys. 3a. Dla tak zdefi-



Rys. 3: Wał drążony obciążony nierównomiernie

niowanego układu zapisujemy równanie równowagi. Analogicznie postępujemy dla trzech pozostałych przedziałów. Rozwiązując równania równowagi otrzymujemy wartości sił wewnętrznych.

Przedział I:

$$\sum M_x = -3M + M_I = 0 \quad \text{stad} \quad M_I = 3M$$

Przedział II:

$$\sum M_x = -3M + 5M + M_{II} = 0 \quad \text{stad} \quad M_{II} = -2M$$

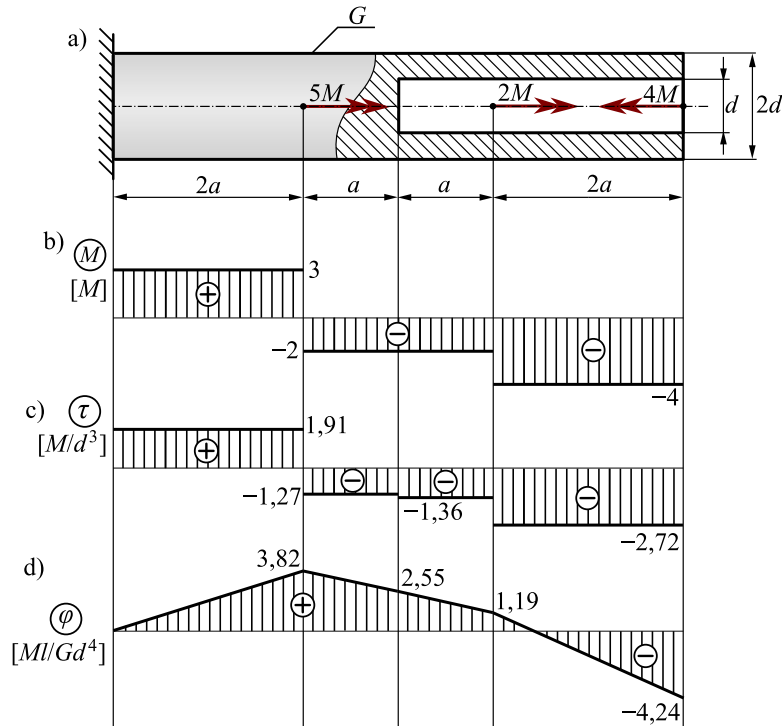
Przedział III:

$$\sum M_x = -3M + 5M + M_{III} = 0 \quad \text{stad} \quad M_{III} = -2M$$

Przedział IV:

$$\sum M_x = -3M + 5M + 2M + M_{IV} = 0 \quad \text{stad} \quad M_{IV} = -4M$$

Rozwiązanie nanosimy na wykres przedstawiony na Rys. 4b. Należy zauważyć, że siła w przedziale II i III jest taka sama. Wynika to stad, że przedziały te różnią się tylko kształtem przekroju; obciążenie na nie działające jest takie samo.



Rys. 4: Wał drążony obciążony nierównomiernie

Kolejnym krokiem jest wyznaczenie naprężeń w poszczególnych przedziałach. Dla czystego skręcania pojawiają się naprężenia styczne  $\tau$ , których wartość wyznaczamy mnożąc siłę wewnętrzną  $M$  przez promień  $\rho$ , na którym chcemy wyznaczyć naprężenia i dzieląc przez biegunowy moment bezwładności  $I_0$ . Ponieważ w obliczeniach wytrzymałościowych interesują nas naprężenia maksymalne przyjmuje się, że  $\rho = r$ , gdzie  $r$  jest promieniem wału. W rozpatrywanym przypadku, dla całej długości wału promień jest równy  $d$ .

Zgodnie z Rys. 1 na długości wału mamy dwa różne przekroje. Odpowiadające im momenty biegunowe mają wartości

$$I_0^I = I_0^{II} = \frac{\pi(2d)^4}{32} = \frac{\pi d^4}{2} \quad \text{oraz} \quad I_0^{III} = I_0^{IV} = \frac{\pi}{32} \left( (2d)^4 - d^4 \right) = \frac{\pi}{32} 15d^4$$

Biorąc pod uwagę momenty skręcające w poszczególnych przekrojach, momenty bezwładności oraz promień, możemy wyznaczyć naprężenia:

Przedział I:

$$\tau_I = \frac{M_I r_I}{I_0^I} = \frac{3Md}{(\pi d^4)/2} = 1,91 \frac{M}{d^3}$$

Przedział II:

$$\tau_{II} = \frac{M_{II} r_{II}}{I_0^{II}} = -\frac{2Md}{(\pi d^4)/2} = -1,27 \frac{M}{d^3}$$

Przedział III:

$$\tau_{III} = \frac{M_{III} r_{III}}{I_0^{III}} = \frac{-2Md}{(15\pi d^4)/32} = -1,36 \frac{M}{d^3}$$

Przedział IV:

$$\tau_{IV} = \frac{M_{IV} r_{IV}}{I_0^{IV}} = \frac{-4Md}{(15\pi d^4)/32} = -2,72 \frac{M}{d^3}$$

Wykres naprężeń przedstawiono na Rys. 4c. Pozwala on znaleźć przekroje niebezpieczne wału, czyli takie, w których występują największe naprężenia. Wykres naprężeń jest również wskazówką do tego, jak efektywnie ukształtować wał. W miejscu małych naprężeń można zmniejszyć przekrój wału, redukując tym samym jego masę. Należy jednak pamiętać, że zmniejszenie przekroju pociąga za sobą zmniejszenie sztywności, czyli zwiększenie deformacji.

Ostatnim krokiem jest przygotowanie wykresu kąta obrotu poszczególnych przekroi wału. Ponieważ kąt obrotu dowolnego przekroju zależy od skręcenia wału, które jest funkcją liniową współrzędnej  $x$ , wykres kąta obrotu również jest funkcją liniową. Ponadto, wykres kąta obrotu musi być funkcją ciągłą, ponieważ brak ciągłości przemieszczeń oznaczałoby przerwanie wału. Zatem, aby wyznaczyć wykres kąta skręcenia przekroi wału wystarczy wyznaczyć kąty obrotu punktów charakterystycznych i połączyć je liniami prostymi.

Kąt obrotu pierwszego  $\varphi_1$  jest równe zero, ponieważ w tym punkcie wał jest utwierdzony. Obrót przekroju drugiego  $\varphi_2$  jest równy skręceniu pierwszego przedziału wału  $\varphi_{1-2}$ . Obrót przekroju trzeciego  $\varphi_3$  jest równe sumie skręcenia przedziału pierwszego  $\varphi_{1-2}$  i drugiego  $\varphi_{2-3}$ . Podobnie dla przekroju czwartego i końcowego - obrót końcowej płaszczyzny wału jest równy sumie skręceń wszystkich przedziałów wału. W rozpatrywanym przypadku mamy:

Obrót przekroju 1:

$$\varphi_1 = 0$$

Obrót przekroju 2:

$$\varphi_2 = \varphi_{1-2} = \frac{M_I l_I}{G I_0^I} = \frac{3M \cdot 2l}{G(\pi d^4)/2} = 3,82 \frac{Ml}{Gd^4}$$

Obrót przekroju 3:

$$\varphi_3 = \varphi_{1-2} + \varphi_{2-3} = \frac{M_I l_I}{G I_0^I} + \frac{M_{II} l_{II}}{G I_0^{II}} = 3,82 \frac{Ml}{Gd^4} - \frac{2M \cdot l}{G(\pi d^4)/2} = 2,55 \frac{Ml}{Gd^4}$$

Obrót przekroju 4:

$$\varphi_4 = \varphi_{1-2} + \varphi_{2-3} + \varphi_{3-4} = \frac{M_I l_I}{G I_0^I} + \frac{M_{II} l_{II}}{G I_0^{II}} + \frac{M_{III} l_{III}}{G I_0^{III}} = 2,55 \frac{Ml}{Gd^4} - \frac{2M \cdot l}{G(15\pi d^4)/32} = 1,19 \frac{Ml}{Gd^4}$$

Obrót przekroju 5:

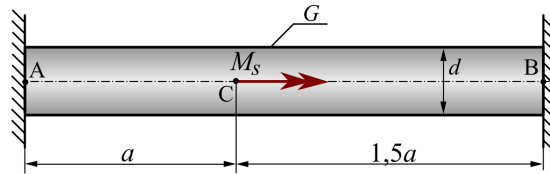
$$\varphi_5 = \varphi_{1-2} + \dots + \varphi_{4-5} = \frac{M_I l_I}{G I_0^I} + \dots + \frac{M_{IV} l_{IV}}{G I_0^{IV}} = 1,19 \frac{Ml}{Gd^4} - \frac{4M \cdot 2l}{G(15\pi d^4)/32} = -4,24 \frac{Ml}{Gd^4}$$

Na podstawie powyższych obliczeń buduje się wykres kąta obrotu przedstawiony na Rys. 4d. Z wykresu można odczytać obrót dowolnego przekroju wału. Widać, że w przedziale czwartym znajduje się przekrój, który się nie obraca. Wartości dodatnie na wykresie oznaczają, że odpowiadające im przekroje obracają się przeciwnie do ruchu wskazówek zegara. Te, którym odpowiadają wartości ujemne, obracają się zgodnie z ruchem wskazówek zegara.

## Wał pryzmatyczny, statycznie niewyznaczalny

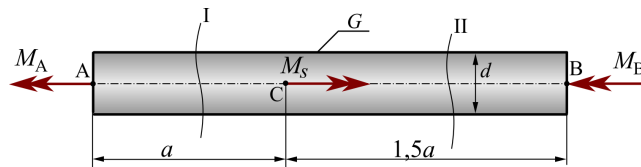
### Przykład

Wał o średnicy  $d$  utwierdzony na obu końcach obciążony jest momentem  $M_s$ , zgodnie z Rys. 5. Wyznaczyć rozkład sił wewnętrznych, naprężeń oraz kąta skręcenia. Materiał wału opisany jest modułem Kichhoffa  $G$ .



Rys. 5: Wał pryzmatyczny statycznie niewyznaczalny

Wał utwierdzony jest na obu końcach, zatem na obu końcach pojawiają się reakcje, zgodnie z Rys. 6 przedstawiającym układ uwolniony od więzów. Można zauważyć, że skoro moment  $M_s$  jest dodatni, to obie reakcje będą ujemne. W ogólnym przypadku reakcje te są różne, zatem obie należy wyznaczyć. Jednak zapisać możemy jedynie jedno równanie równowagi, czyli równanie momentów względem osi  $x$ . Zadanie jest więc statycznie niewyznaczalne.



Rys. 6: Układ uwolniony od więzów

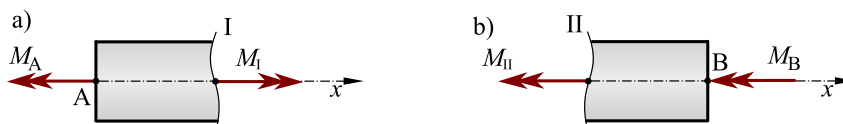
Równanie równowagi będzie miało postać

$$\sum M_x = -M_A + M_s - M_B = 0 \quad \text{stad} \quad M_A + M_B = M_s \quad (1)$$

Jest to pierwsze równanie niezbędne do rozwiązania zadania. Drugie równanie będzie równaniem zgodności przemieszczeń, wynikającym ze zgodności kątów obrotów ze sposobem podparcia. Widać, że kąt obrotu wału w punkcie B względem punktu A będzie równy zero - oba końce są utwierdzone, więc nie obracają się. Można zatem powiedzieć, że całkowity kąt skręcenia wału jest równy zero. Ponieważ wał składa się z dwóch przedziałów możemy zapisać

$$\varphi_{AB} = 0 \quad \rightarrow \quad \varphi_{AC} + \varphi_{CB} = 0 \quad (2)$$

Jest to drugie równanie potrzebne do rozwiązania zadania. Wiemy, że kąty skręcenia poszczególnych części wału zależą od wartości momentu skręcającego w tych częściach. Wyznamy je metodą przekroji myślowych. Wykonując przekroje tak jak na Rys. 6 i odrzucając w przypadku przedziału pierwszego prawą, a w przypadku drugiego lewą część wału, otrzymamy dwa fragmenty wału przedstawione na Rys. 7



Rys. 7: Równowaga odciętych fragmentów wału

Dla każdego fragmentu możemy zapisać równie równowagi momentów względem osi  $x$ , co pozwoli zapisać

$$M_I = M_A, \quad M_{II} = -M_B \quad (3)$$

Możemy zatem zapisać

$$\varphi_{AC} = \frac{M_I l_I}{GI_0} = \frac{M_A l}{GI_0}; \quad \varphi_{BC} = \frac{M_{II} l_{II}}{GI_0} = -\frac{3M_B l}{2GI_0}$$

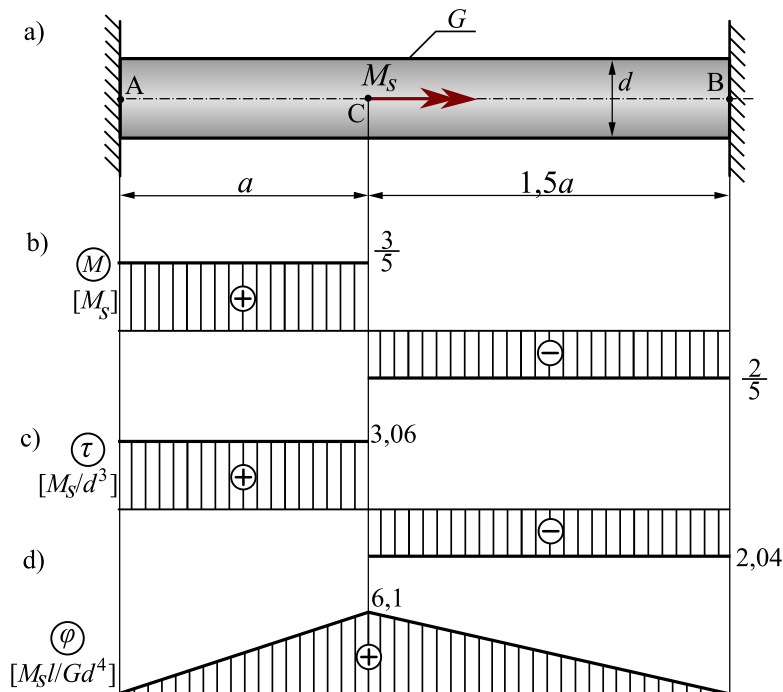
Podstawiając powyższe do równania zgodności przemieszczeń (2) otrzymamy

$$\frac{M_A l}{GI_0} - \frac{3M_B l}{2GI_0} = 0 \quad \rightarrow \quad M_A = \frac{3}{2}M_B$$

Ostatecznie otrzymujemy układ dwóch równań z dwiema niewiadomymi, który pozwala wyznaczyć obie reakcje

$$\begin{cases} M_A + M_B = M_s \\ M_A = \frac{3}{2}M_B \end{cases} \quad (4)$$

Reakcje są zatem równe:  $M_A = \frac{3}{5}M_s$  oraz  $M_B = \frac{2}{5}M_s$ . Podstawiając te wartości do równania (3) otrzymamy rozwiązanie w postaci wykresu przedstawionego jest na Rys. 8b. Należy zauważyć, że w punkcie przyłożenia momentu, na wykresie pojawia się uskok równy wartości tego momentu.



Rys. 8: Rozwiązanie

Mając wartości sił wewnętrznych możemy wyznaczyć naprężenia w poszczególnych przekrojach wału

$$\tau_I = \frac{M_I r}{I_0} = \frac{96M_s d}{10\pi d^4} = 3,06 \frac{M_s}{d^3}; \quad \tau_{II} = \frac{M_{II} r}{I_0} = -\frac{64M_s d}{10\pi d^4} = -2,04 \frac{M_s}{d^3}$$

Z analizy zadania wiemy, że oba końce wału są utwierdzone, zatem kąty obrotu w tych miejscach są równe zero. Aby wyznaczyć wykres kąta skręcenia wystarczy policzyć jego wartość w punkcie charakterystycznym, punkcie przyłożenia siły, i połączyć ten punkt liniami prostymi z wartościami zerowymi na końcach wału. Wartość kąta skręcenia będzie równa

$$\varphi_C = \frac{M_I l_I}{GI_0} = \frac{96M_s a}{5G\pi d^4} = 6,1 \frac{M_s a}{Gd^4}$$