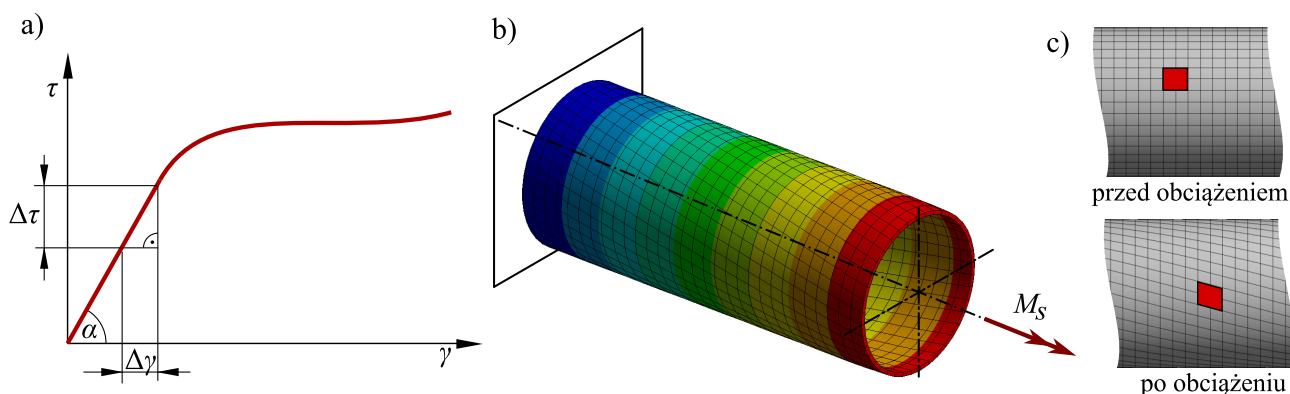


# Skrećanie

## Wyniki eksperymentu i założenia

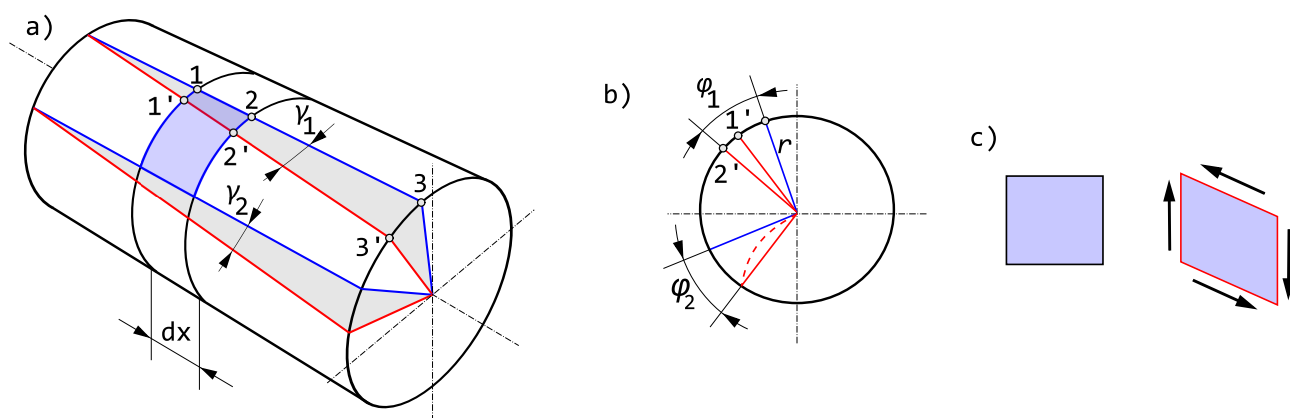
Na podstawie eksperymentu, statycznej próby skrećania, można przyjąć, że wał poddany skrećaniu znajduje się w stanie czystego ścinania – każdy z kwadratów siatki naniesionej na powierzchnię wału przed eksperymentem, zamienia się w romb po jego deformacji. W zakresie małych odkształceń proces deformacji ma charakter sprężysty, jak widać na wykresie na Rys. 1.



Rys. 1: Odkształcenie pręta skrećanego

Obserwacje przeprowadzone w czasie eksperymentu pozwalają wprowadzić założenia dotyczące deformacji wału, dzięki którym możliwe jest wyprowadzenie zależności na naprężenia i kąt skręcenia. Założenia, zobrazowane na Rys. 2, są następujące:

- wszystkie tworzące wału obracają się o ten sam kąt:  $\gamma_1 = \gamma_2$ ,
- wszystkie narysowane na powierzchni kwadraty zmieniają się w romby (deformacja od ścinania),
- każdy przekrój poprzeczny obraca się względem innego przekroju o kąt skręcenia proporcjonalny do wielkości momentu skrećającego i odległości między przekrojami,
- powierzchnie czołowe nie deformują się, a przekroje poprzeczne pozostają kołowe,
- promienie na powierzchniach czołowych po deformacji pozostają proste i obracają się o ten sam kąt  $\varphi_1 = \varphi_2$ ,
- odległości między sąsiednimi przekrojami nie zmieniają się po deformacji.



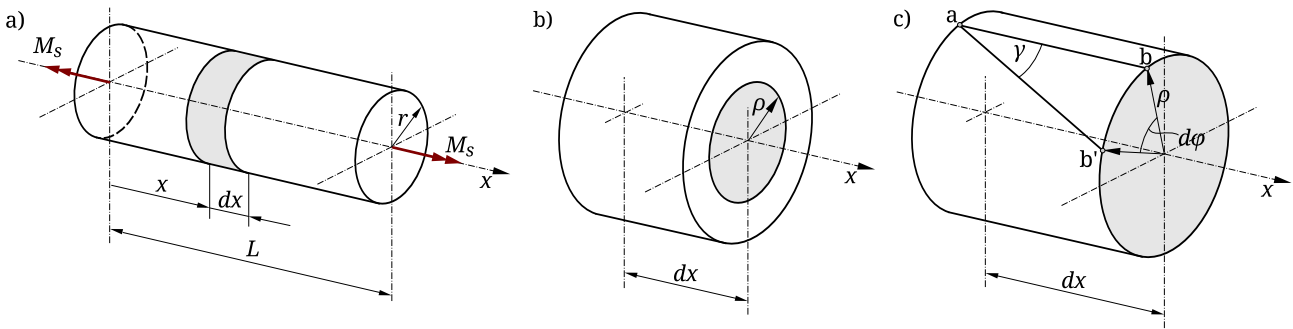
Rys. 2: Odkształcenie pręta skrećanego

Powyższe założenia pozwalają na sformułowanie hipotezy płaski przekroji dla skrećania:

podczas skręcania oś okrągłego pręta pozostaje prosta, a przekroje poprzeczne pozostają płaskie i prostopadłe do osi pręta zachowując się jak sztywne dyski. Oznacza to, że ich promienie obracają się wokół osi pręta, ale nie deformują, a kąty między nimi pozostają bez zmian.

## Zależności geometryczne

Z wału od długości  $l$  i promieniu  $r$ , znajdującego się w stanie czystego skręcania, wycinamy, w odległości  $x$  od początku układu współrzędnych, elementarny fragment o długości  $dx$ . Następnie z tego fragmentu wycinamy walec o promieniu  $\rho$ , jak na Rys. 3c. Załóżmy, że lewy koniec wycinka jest nieruchomy, natomiast prawy, pod działaniem obciążenia, obróci się przeciwnie do ruchu wskazówek zegara. Po skręceniu wycinka wału promień  $\rho$ , wskazujący punkt  $b$ , obróci się o kąt  $d\varphi$ . Tworząca walca  $ab$  o długości  $dx$  obróci się o kąt  $\gamma$ . Można zauważyć, że kąt  $\varphi$  maleje wraz z przemieszczeniem się przekroju w kierunku punktu  $a$ , natomiast kąt  $\gamma$  maleje wraz ze spadkiem wartości kąta  $\varphi$ . Powstanie w ten sposób łuk  $bb'$ , którego długość można wyznaczyć na dwa sposoby. Zgodnie z Rys. 3, z jednej strony  $bb' = \rho d\varphi$ , a z drugiej  $bb' = \gamma dx$ .



Rys. 3: Odształcenie pręta skręcanego

Porównując obie zależności otrzymamy wyrażenie, pozwalające określić kąt obrotu tworzącej, czyli kąt odkształcenia postaciowego

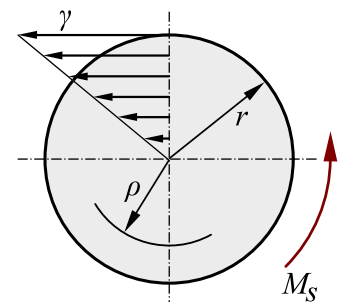
$$\gamma = \rho \frac{d\varphi}{dx} \quad (1)$$

Z powyższej zależności widać, że największy kąt odkształcenia postaciowego będzie dla  $\rho = r$ . Możemy zatem zapisać

$$\gamma_{max} = r \frac{d\varphi}{dx} \quad \rightarrow \quad \frac{d\varphi}{dx} = \frac{\gamma_{max}}{r}.$$

Wynika z tego, że pochodna z powyższej zależności jest wartością stałą. Podstawiając tę zależność do równania (1) otrzymamy

$$\gamma = \frac{\rho}{r} \gamma_{max}.$$



Rys. 4: Rozkład kąta  $\gamma$

Z zależności tej wynika, że kąt odkształcenia postaciowego zmienia się liniowo wraz ze zmianą promienia  $\rho$  od wartości równej zero w osi wału, do wartości  $\gamma_{max}$  na powierzchni zewnętrznej, odpowiadającej promieniowi  $r$ . Rozkład wartości kąta  $\gamma$  na przekroju wału przedstawiono na Rys. 4. Powyższe zależności nie zawierają stałych materiałowych. Są zatem prawdziwe dla każdego materiału.

Warto zauważyć analogię między odkształceniem pręta rozciąganego i skręcanego. Analizując skręcenie elementarnego wycinka wału o długości  $dx$ , przedstawionego na Rys. 5, odciętego w odległości  $x$  od początku układu współrzędnych widać, że na jego lewym końcu kąt skręcenia równy jest  $\varphi(x)$ . Na prawym końcu kąt ten będzie większy o przyrost  $d\varphi$ , wynikający z przyrostu zmiennej  $x$ . Zatem zmiana kąta skręcenia wycinka odniesiona do jego długości będzie równa

$$\frac{\varphi(x) + d\varphi - \varphi(x)}{dx} = \frac{d\varphi}{dx} = \theta$$

Można zatem zdefiniować wskaźnik skręcenia  $\theta = d\varphi/dx$ , który jest analogiczny do odkształcenia przy rozciąganiu opisanego zależnością  $\varepsilon = du/dx$ .

## Naprężenia w wale

Statyczna próba skręcania pozwala wyznaczyć zależność  $\tau = G\gamma$ . Podstawiając do niej zależność (1) otrzymamy wyrażenie na rozkład naprężeń na przekroju poprzecznym wału

$$\tau = G\rho \frac{d\varphi}{dx}. \quad (2)$$

Ponieważ zarówno moduł Kirchhoffa jak i wskaźnik skręcenia są stałe, naprężenia będą zmieniły się tak samo, jak kąt odkształcenia postaciowego – liniowo, od wartości zero w osi pręta, do wartości maksymalnej na powierzchni wału.

Przy projektowaniu wałów interesuje nas zależność między naprężeniami  $\tau$  i obciążeniem, czyli momentem skręcającym  $M_s$ . Zdefiniujemy elementarną siłę styczną na przekroju poprzecznym, działającą na elementarnym obszarze  $dA$ , która, zgodnie z Rys. 6, jest równa  $dT = \tau dA$ . Elementarny moment będzie zatem równy  $dM_s = dT\rho = \tau\rho dA$ . Podstawiając za  $\tau$  wyrażenie (2) i całkując otrzymamy

$$M_s = G \frac{d\varphi}{dx} \int_A \rho^2 dA.$$

Całka z powyższego równania jest biegunowym momentem bezwładności. Oznaczając go  $I_0$  możemy zapisać

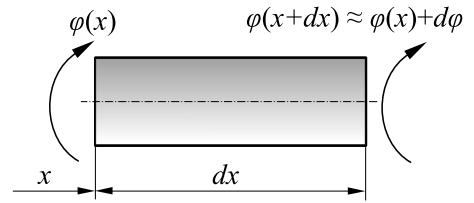
$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_s}{GI_0}. \quad (3)$$

Podstawiając to wyrażenie do (2) otrzymamy

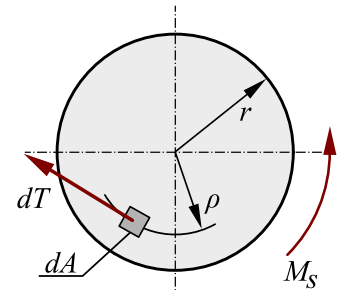
$$\tau = \frac{M_s\rho}{I_0}. \quad (4)$$

Widzimy zatem, że wartość naprężeń zależy liniowo od wartości promienia, jest wprost proporcjonalna do obciążenia i odwrotnie proporcjonalna do momentu bezwładności. Chcąc zmniejszyć wartość naprężeń, należy zwiększyć moment bezwładności, czyli zmodyfikować kształt przekroju wału. Największa wartość naprężeń pojawia się na powierzchni wału, odpowiadającej promieniowi  $\rho = r$

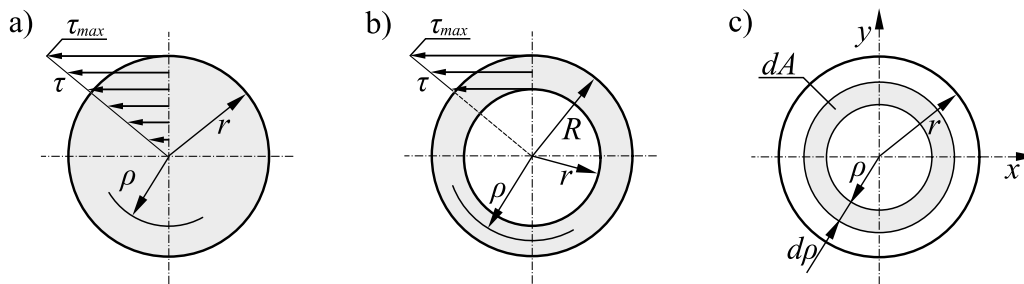
$$\tau_{max} = \frac{M_s r}{I_0}.$$



Rys. 5: Skręcenie wycinka wału



Rys. 6: Siła styczna



Rys. 7: Naprężenia w pręcie skręcanym: pełnym a); drążonym b); wyznaczenie momentu bezwładności c)

Rozkład naprężeń na przekroju można wyznaczyć wyliczając wartość naprężeń maksymalnych i łącząc punkt im odpowiadający z osią wału. Dotyczy to zarówno wału pełnego jak i drążonego. W przypadku tego ostatniego naprężenia pojawiają się tylko tam, gdzie jest materiał. Przykładowe rozkłady naprężeń przedstawiono na Rys. 7a i b.

Rozkład naprężeń na wale skręcanym wyjaśnia, dlaczego przekrój poprzeczny wału jest zwykle kołowy. Pozwala on na uzyskanie równomiernego rozkładu naprężeń na obwodzie. Jednocześnie wydrążenie wału obniża znacząco jego masę, zmniejszając nieznacznie jego możliwości do przenoszenia naprężeń, bo te w środku wału są niewielkie. Dlatego też, najbardziej efektywnym przekrojem dla wału jest rura cienkościenna. Należy jednak pamiętać, że zbyt cienka ścianka wału drążonego może prowadzić do jego wybočenja, co przedstawiono na Rys. 8.

Chcąc wyznaczyć wartość naprężeń należy znać wartość biegunowego momentu bezwładności. Z definicji wiemy, że

$$I_0 = \int_A \rho^2 dA.$$

Zdefiniujmy na przekroju kołowym, zgodnie z Rys. 7c, elementarne pole  $dA$  w postaci pierścienia o nieskończenie małej grubości  $d\rho$ . Będzie ono równe  $2\pi\rho d\rho$ . Po podstawieniu do całki opisującej moment bezwładności okaże się, że zmienną jest teraz  $\rho$ , którą zmienia się w granicach od zera do  $r$ . Możemy zatem zapisać, dla przekroju pełnego

$$I_0^P = \int_A 2\pi\rho^3 d\rho = 2\pi \frac{1}{4} \rho^4 \Big|_0^r = \frac{\pi r^4}{2} = \frac{\pi d^4}{32}.$$

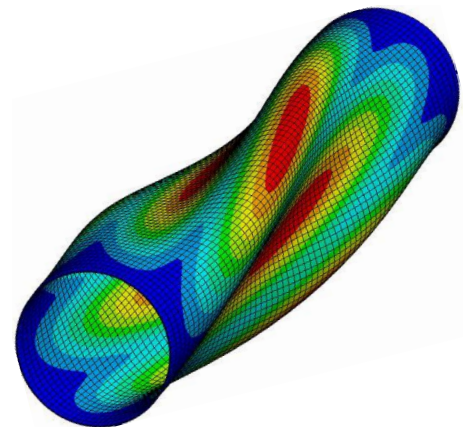
Podobnie można wyprowadzić zależność na moment bezwładności dla przekroju w postaci pierścienia, właściwego dla wału drążonego. Przyjmując, że promień wewnętrzny wynosi  $r$ , a zewnętrzny  $R$ , zmieniają się jedynie granice całkowania – od  $r$  do  $R$ . Mamy zatem

$$I_0^D = \frac{\pi(R^4 - r^4)}{2} = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{32}.$$

Z punktu widzenia wytrzymałości wału, znaczenie mają naprężenia maksymalne. Jeżeli przyjmiemy, że jedynie te nas interesują, możemy zapisać wyrażenie na naprężenia w uproszczonej postaci

$$\tau = \frac{M_s}{W_0},$$

gdzie  $W_0$  jest wskaźnikiem wytrzymałości przekroju na skręcanie zdefiniowanym jako  $W_0 = I_0/r$ . Ma zatem wymiar  $[\text{mm}^3]$ .



Rys. 8: Wybočenje rury cienkościennej

## Skrećenie wału

Pod wpływem działania momentu skręcającego wał ulega deformacji mierzonej kątem skrećenia  $\varphi$ . Aby go wyznaczyć wróćmy do równania (3). Po rozdzieleniu zmiennej otrzymamy

$$d\varphi = \frac{M_s}{GI_0} dx$$

Całkując stronami otrzymamy zależność pozwalającą na wyznaczenie kąta skrećenia dla dowolnego punktu wału, znajdującego się w odległości  $x$  od początku układu współrzędnych

$$\varphi(x) = \frac{M_s x}{GI_0}$$

Dla utwierdzonego wału pryzmatycznego o długości  $l$ , obciążonego na końcu momentem  $M_s$ , kąt skrećenia swobodnego końca można wyznaczyć z zależności

$$\varphi = \frac{M_s l}{GI_0} \quad (5)$$

Wyrażenie to jest analogicznie do tego, na wydłużenie pręta rozciąganego.

## Projektowanie wałów

Projektowanie wałów sprowadza się do sprawdzenia warunku wytrzymałościowego i sztywnościowego. W przypadku skręcania w pręcie pojawiają się naprężenia styczne, które zmieniają się liniowo na przekroju – w osi pręta są równe zeru, a wartość maksymalną osiągają na powierzchni zewnętrznej

$$\tau = \frac{M_s \rho}{I_0}$$

W obliczeniach wytrzymałościowych przyjmujemy zatem  $\rho = r$ , a warunek ma postać:

$$\tau_{max} \leq \tau_{dop} \rightarrow \frac{M_s r}{I_0} \leq \tau_{dop}$$

Przyjmuje się, że  $\tau_{dop} = \sigma_{dop} / \sqrt{3}$ .

Warunek sztywnościowy ma postać

$$\varphi_{max} \leq \varphi_{dop} \rightarrow \frac{M_s l}{GI_0} \leq \varphi_{dop}$$

Zarówno naprężenia jak i kąt skrećenia są odwrotnie proporcjonalne do biegunowego momentu bezwładności przekroju wału. Ponieważ wały mają zwykle przekrój poprzeczny okrągły, pełny lub drażony, momenty te mają postać

- dla wału pełnego

$$I_0^P = \frac{\pi r^4}{2} = \frac{\pi d^4}{32}$$

- dla wału drażonego

$$I_0^D = \frac{\pi(R^4 - r^4)}{2} = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{32}$$

## Literatura

1. Gorškov A.G., Trošin V.H., Šalašin V.I. *Soprotivlenie materialov*, FIZMATLIT, Moskwa, 2005