Wytrzymałość Materiałów I

Parametry geometryczne przekroju poprzecznego

opracował:
dr hab. inż. Paweł JASION
e-mail: pawel.jasion@put.poznan.pl
www: pawel.jasion.pracownik.put.poznan.pl

Politechnika Poznańska
Instytut Mechaniki Stosowanej
Zakład Wytrzymałości Materiałów i Konstrukcji

Plan prezentacji

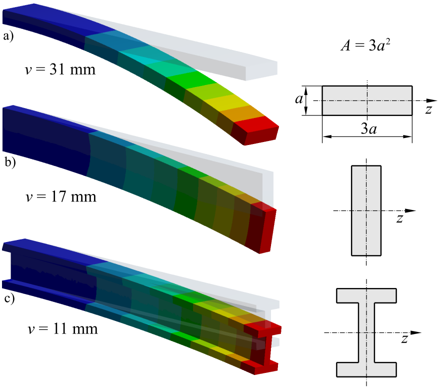
1. Wyznaczanie środka ciężkości
   - Pole powierzchni figury płaskiej
   - Moment statyczny
   - Środek ciężkości
2. Momenty bezwładności
   - Osiowy moment bezwładności
   - Biegunowy moment bezwładności
   - Odśrodkowy moment bezwładności
3. Definicje i twierdzenia
4. Przykład

Charakterystyka przekroju poprzecznego

- liniowe elementy konstrukcyjne typu pręt, wał czy belka, upraszcza się do linii prostej i przypisuje im przekrój poprzeczny
- siły wewnętrzne działające w takim elemencie przykłada się do środka ciężkości przekroju poprzecznego
- należy zatem umieć określić położenie środka ciężkości oraz zdefiniować parametry opisujące właściwości przekroju poprzecznego

Charakterystyka przekroju poprzecznego

- w zależności od kształtu przekroju poprzecznego elementu konstrukcyjnego, może on wykazywać różną sztywność nawet, jeśli pole powierzchni tego przekroju jest takie samo

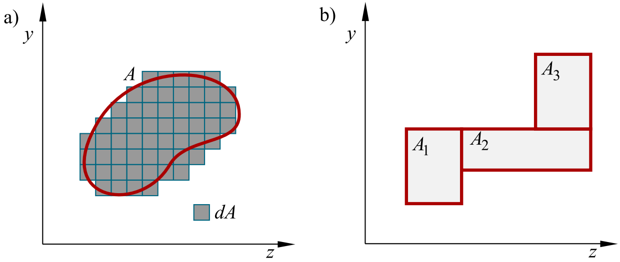


Plan prezentacji

Pole powierzchni figury płaskiej

Definicja

$$A = \int_A dA = \sum_{i=1}^{n} A_i$$

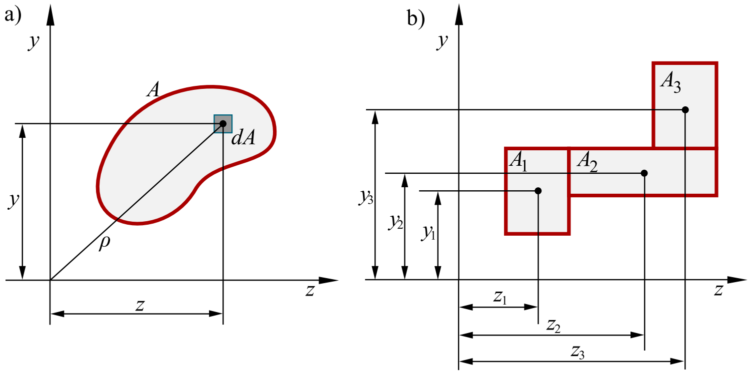


Plan prezentacji

Moment statyczny

Definicja

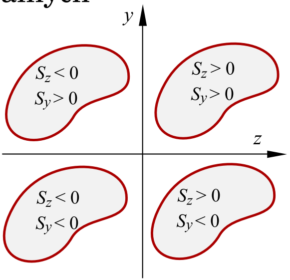
$$S_z = \int_A y dA = \sum_{i=1}^{n} y_i A_i, \qquad S_y = \int_A z dA = \sum_{i=1}^{n} z_i A_i$$



Moment statyczny

Własności momentu statycznego:

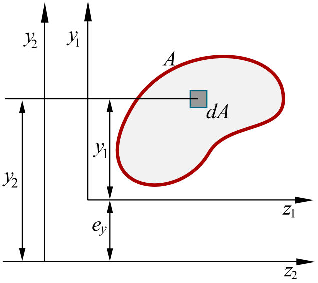
- znak zależy od położenia względem osi
- addytywność: $S_z(A) = S_z(A_1) + S_z(A_2)$
- oś, względem której $S_z = 0$ nazywa się osią centralną i oznaczana jest jako S_{zc}
- punk przecięcia się dwóch osi centralnych jest środkiem ciężkości przekroju



Plan prezentacji

Środek ciężkości

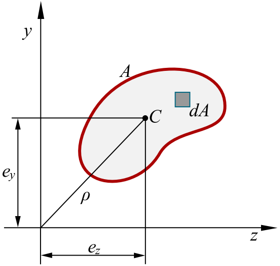
- wyrażenie na środek ciężkości można znaleźć analizując zależność między momentami statycznymi liczonymi względem dwóch równoległych osi
- znajdźmy zatem zależność między momentami względem osi z_1 i z_2

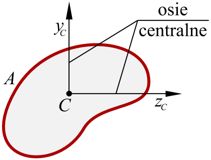


Środek ciężkości

Współrzędne środka ciężkości

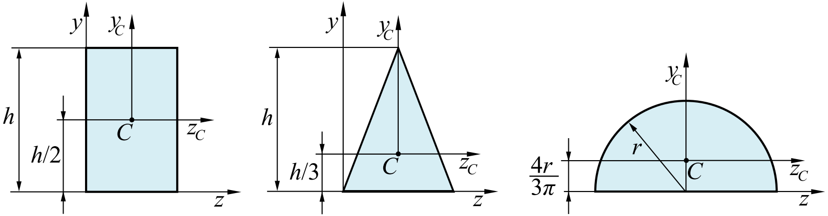
$$e_z = \frac{S_y}{A} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} z_i A_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} A_i}, \qquad e_y = \frac{S_z}{A} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i A_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} A_i}$$





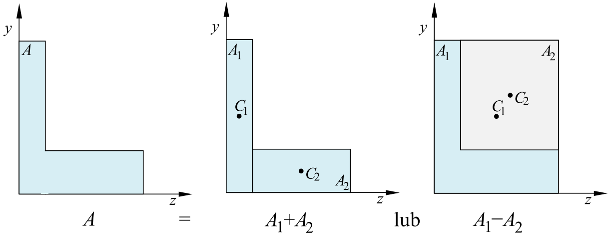
Środek ciężkości

Położenie środka ciężkości figur prostych



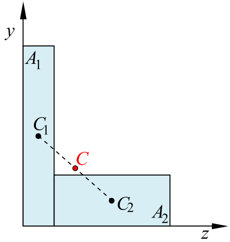
Środek ciężkości – przekroje złożone

- środek ciężkości przekrojów złożonych znajduje się, dzieląc je na figury proste
- w przypadku przekrojów z wycięciem, pole figury wyciętej traktuje się jako ujemne



Środek ciężkości – przekroje złożone

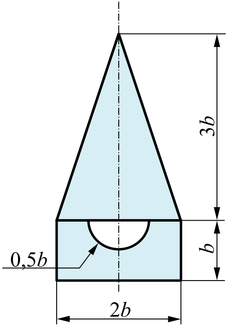
- środek ciężkości przekrojów złożonych znajduje się, dzieląc je na figury proste
- w przypadku przekrojów z wycięciem, pole figury wyciętej traktuje się jako ujemne
- jeśli przekrój składa się z dwóch figur, środek ciężkości przekroju leży na linii łączącej środki ciężkości figur



Środek ciężkości – przekroje złożone

Wyznaczyć środek ciężkości figury przedstawionej na rysunku.

$$e_y = \frac{S_z}{A} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i A_i}{\sum_{i=1}^{n} A_i}$$

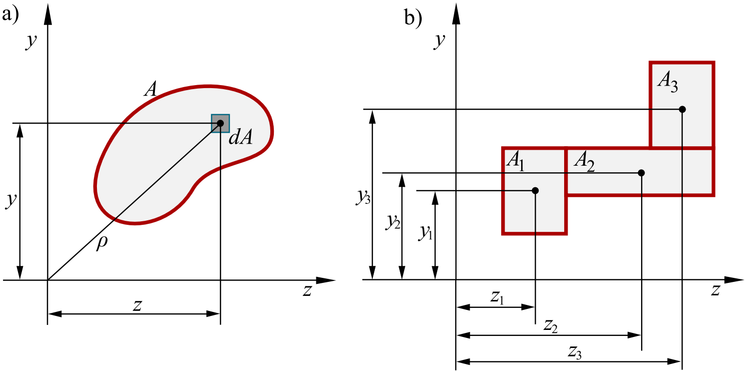


Plan prezentacji

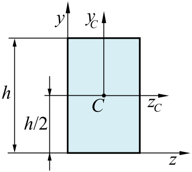
Osiowy moment bezwładności

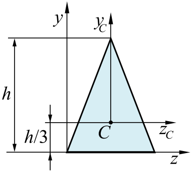
Definicja

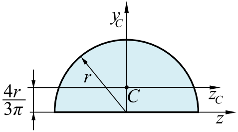
$$I_z = \int_A y^2 dA, \qquad I_y = \int_A z^2 dA$$

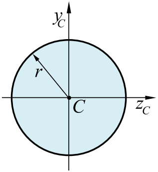


Osiowy moment bezwładności – przykłady









$$I_z = \frac{bh^3}{3}$$

$$I_{zc} = \frac{bh^3}{12}$$

$$I_z = \frac{bh^3}{12}$$

$$I_{zc} = \frac{bh^3}{36}$$

$$I_{yc} = \frac{bh^3}{48}$$

$$I_z = I_{yc} = \frac{\pi r^4}{8}$$

$$I_{zc} = 0,11r^4$$

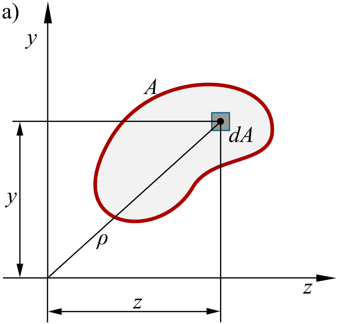
$$I_{zc} = I_{yc} = \frac{\pi r^4}{4}$$

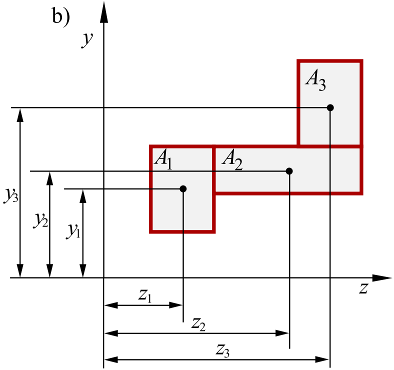
Plan prezentacji

Biegunowy moment bezwładności

Definicja

$$I_0 = \int_A \rho^2 dA$$



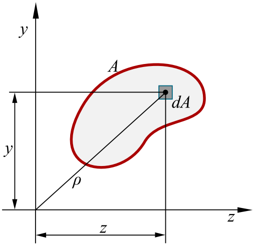


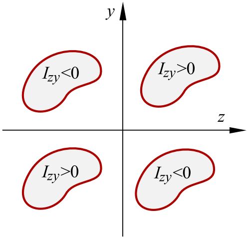
Plan prezentacji

Odśrodkowy moment bezwładności

Definicja

$$I_{zy} = \int_A zy dA$$





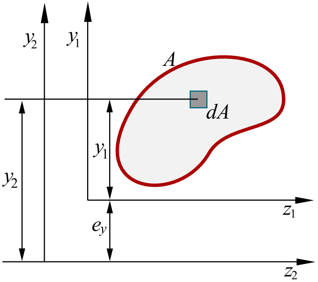
Moment odśrodkowy przekroju jest równy zeru, jeśli przynajmniej jedna oś jest osią symetrii tego przekroju

Nazewnictwo osi

- osie centralne – osie przechodzące przez środek ciężkości przekroju
- osie główne – osie, dla których moment odśrodkowy jest równy zeru
- osie główne centralne – osie przechodzące przez środek ciężkości przekroju, dla których moment odśrodkowy jest równy zeru

Osiowy moment bezwładności

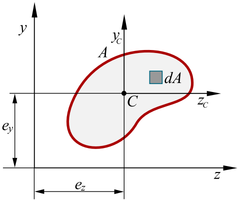
- moment bezwładność liczony względem różnych osi ma różną wartość
- znajdźmy zatem zależność między momentami względem osi z_1 i z_2



Osiowy moment bezwładności

Twierdzenie Steiner'a

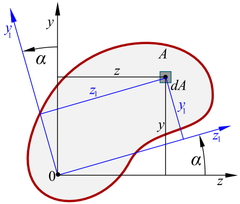
$$I_z = I_{zc} + Ae_y^2$$



Twierdzenie Steiner'a pozwala wyznaczyć moment bezwładności przekroju względem osi centralnej, jeżeli znany jest moment względem innej dowolnej osi i odległość między osiami.

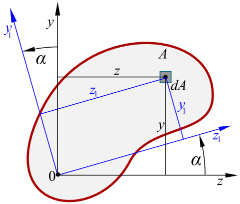
Znajdowanie osi głównych centralnych

- wartości momentów bezwładności zależą od położenia początku układu współrzędnych



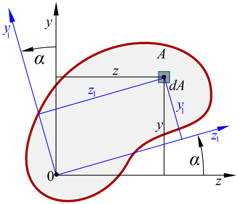
Znajdowanie osi głównych centralnych

- wartości momentów bezwładności zależą od położenia początku układu współrzędnych
- dla danego początku układu współrzędnych momenty bezwładności i momenty odśrodkowe zmieniają się wraz z obrotem osi



Znajdowanie osi głównych centralnych

- wartości momentów bezwładności zależą od położenia początku układu współrzędnych
- dla danego początku układu współrzędnych momenty bezwładności i momenty odśrodkowe zmieniają się wraz z obrotem osi
- zwykle interesują nas ekstremalne wartości momentów bezwładności, odpowiadające osiom głównym centralnym – główne centralne momenty bezwładności



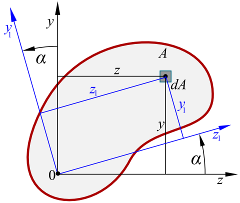
Znajdowanie osi głównych centralnych

- kąt obrotu określający położenie osi głównych wyznaczamy z zależności:

$$\tan 2\alpha = \frac{2I_{zy}}{I_y - I_z}$$

- ekstremalne wartości momentów bezwładności wynoszą:

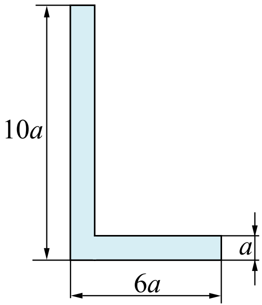
$$I_{ext} = \frac{I_z + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2}\right)^2 + I_{zy}^2}$$



Schemat rozwiązywania zadań

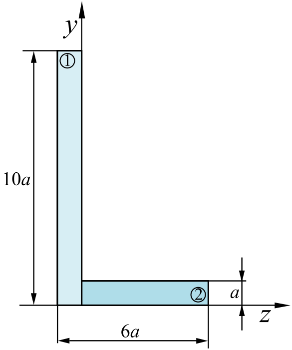
Zadanie

Dla przekroju kątownika znaleźć położenie głównych centralnych osi bezwładności oraz obliczyć wartości momentów bezwładności względem tych osi.



Schemat rozwiązywania zadań

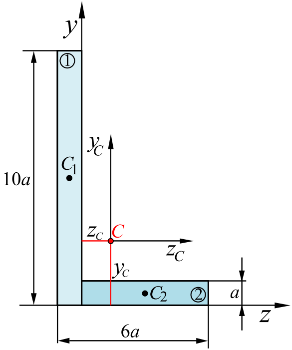
1. Dzielimy przekrój na figury proste i wprowadzamy układ współrzędnych



Schemat rozwiązywania zadań

1. Dzielimy przekrój na figury proste i wprowadzamy układ współrzędnych
2. Wyznaczamy środek ciężkości

$$z_c = \frac{\sum z_i A_i}{\sum A_i}, \qquad y_c = \frac{\sum y_i A_i}{\sum A_i}$$



Schemat rozwiązywania zadań

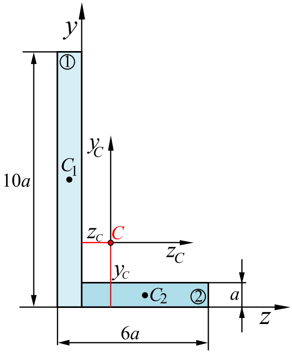
1. Dzielimy przekrój na figury proste i wprowadzamy układ współrzędnych
2. Wyznaczamy środek ciężkości

$$z_c = \frac{\sum z_i A_i}{\sum A_i}, \qquad y_c = \frac{\sum y_i A_i}{\sum A_i}$$

3. Wyznaczamy momenty bezwładności oraz moment odśrodkowy względem osi y i z

$$I_z = I_{z1} + I_{z2}, \qquad I_y = I_{y1} + I_{y2}$$

$$I_{zy} = I_{zy1} + I_{zy2}$$

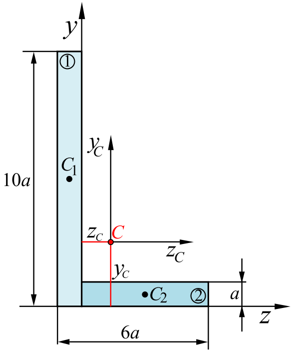


Schemat rozwiązywania zadań

4. Z twierdzenia Steinera wyznaczamy momenty bezwładności względem osi y_c i z_c oraz moment odśrodkowy

$$I_{zc} = I_z - y_c^2 A, \qquad I_{yc} = I_y - z_c^2 A$$

$$I_{zyc} = I_{zy} - z_c y_c A$$



Schemat rozwiązywania zadań

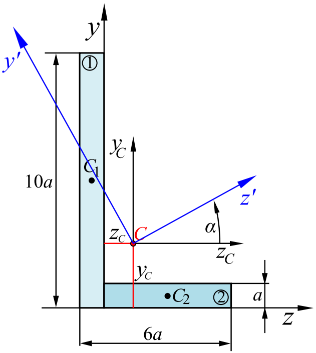
4. Z twierdzenia Steinera wyznaczamy momenty bezwładności względem osi y_c i z_c oraz moment odśrodkowy

$$I_{zc} = I_z - y_c^2 A, \qquad I_{yc} = I_y - z_c^2 A$$

$$I_{zyc} = I_{zy} - z_c y_c A$$

5. Wyznaczamy kąt osi głównych y' i z'

$$\tan 2\alpha = \frac{2I_{zyc}}{I_{yc} - I_{zc}}$$



Schemat rozwiązywania zadań

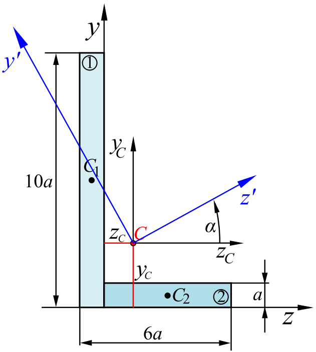
4. Z twierdzenia Steinera wyznaczamy momenty bezwładności względem osi y_c i z_c oraz moment odśrodkowy

$$I_{zc} = I_z - y_c^2 A, \qquad I_{yc} = I_y - z_c^2 A$$

$$I_{zyc} = I_{zy} - z_c y_c A$$

5. Wyznaczamy kąt osi głównych y' i z'

$$\tan 2\alpha = \frac{2I_{zyc}}{I_{yc} - I_{zc}}$$



6. Wyznaczamy główne centralne momenty bezwładności I_{ext}

$$I_{ext} = \frac{I_{zc} + I_{yc}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_{yc} - I_{zc}}{2}\right)^2 + I_{zyc}^2}$$

Profile rzeczywiste

W przypadku przekroi poprzecznych utworzonych z kształtowników walcowanych na zimno położenie środka ciężkości, położenie osi głównych centralnych oraz wartości momentów bezwładności odczytuje się z katalogu producenta.