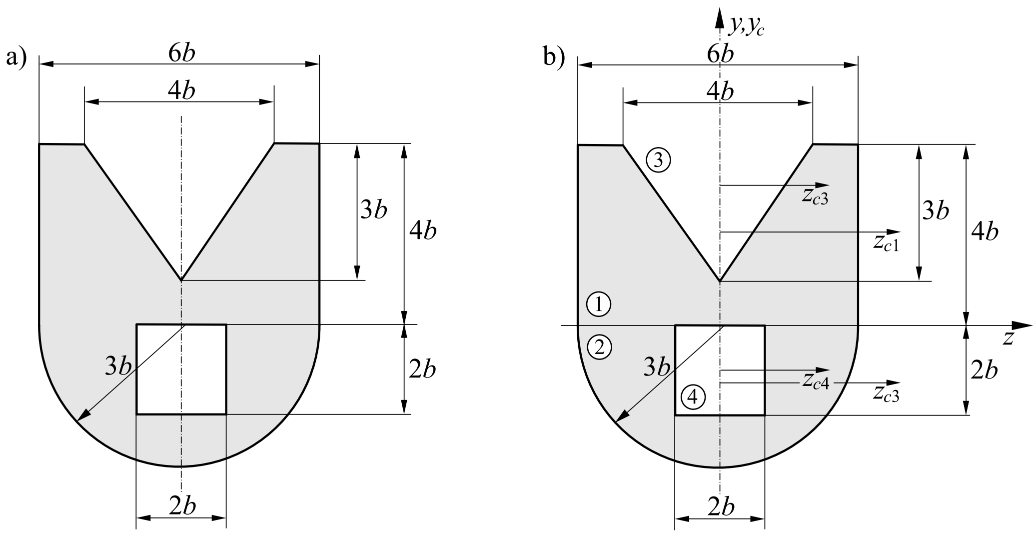
Parametry geometryczne przekroju poprzecznego

Przekrój symetryczny

Przykład

Dla figury złożonej przedstawionej na Rys. 1 wyznaczyć moment bezwładności względem poziomej osi centralnej. Dany jest wymiar b, a figura jest symetryczna względem osi pionowej.

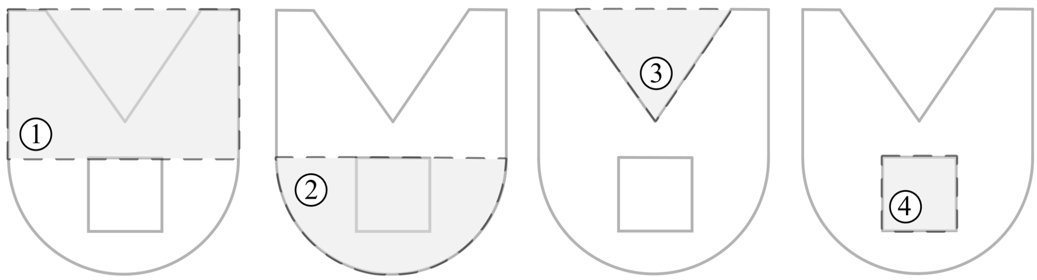


Rys. 1: Figura złożona: a) wymiary; b) osie centralne figur składowych

Wyznaczenie momentu bezwładności względem osi centralnej wymaga, w pierwszej kolejności, wyznaczenia środka ciężkości figury, przez który ta oś przechodzi. Rozpoczynamy od wprowadzenia układu współrzędnych, względem którego będziemy szukali środka ciężkości. Ponieważ figura jest symetryczna, oś pionową y prowadzimy przez płaszczyznę symetrii; będzie to jednocześnie pionowa oś centralna y_c. Pionową współrzędną środka ciężkości e_y wyznaczamy ze wzoru

$$e_y = \frac{\sum S_z^i}{\sum A_i} = \frac{\sum A_i y_i}{\sum A_i}$$

gdzie A_i jest polem powierzchni i-tej figury, y_i jest odległością środka ciężkości tej figury, lub inaczej osi centralnej tej figury z_{c^i}, od przyjętej osi z, a S_z^i jej momentem statycznym względem osi z. Rozpatrywana figura składa się, zgodnie z Rys. 2, z czterech figur prostych: jest sumą prostokąta *1* i półkola *2*, od której odjęto trójkąt *3* i kwadrat *4*. Powyższe parametry



Rys. 2: Podział figury złożonej na figury proste

geometryczne wygodnie jest zebrać w tabeli. Jej pierwsza kolumna informuje o numerze figury i o tym, czy jej pole się dodaje (pole dodatnie) czy odejmuje (pole ujemne). Dla rozważanego przykładu wartości przedstawiono w tabeli 1.

Tabela 1: Parametry geometryczne figur prostych

	A_i	y_i	S_z^i
1	$24b^2$	$2b$	$48b^3$
2	$(9/2)\pi b^2$	$-(4/\pi)b$	$-18b^3$
-3	$6b^2$	$3b$	$-18b^3$
-4	$4b^2$	$-b$	$4b^3$

Środek ciężkości znajduje się zatem na współżędnej

$$e_y = \frac{\sum S_z^i}{\sum A_i} = \frac{48b^3 - 18b^3 - 18b^3 + 4b^3}{24b^2 + (9/2)\pi b^2 - 4b^2} = 0,57b.$$

Znając położenie środka ciężkości figury możemy wyznaczyć wartości momentu bezwładności względem poziomej osi centralnej. Można to zrobić na dwa sposoby. Wybór sposobu zależy od złożoności figury, umiejscowienia przyjętej osi z i preferowanego sposobu rozwiązywania.

Sposób pierwszy

W pierwszej kolejności wyznaczymy moment bezwładności całej figury względem przyjętej os z, a następnie, z twierdzenia Steiner'a, wyznaczymy moment względem osi centralnej z_c.

Korzystając z zasady addytywności możemy zapisać

$$I_z = I_z^1 + I_z^2 - I_z^3 - I_z^4$$

Należy zauważyć, że momenty bezwładności figur *1*, *2* i *4* możemy wyznaczyć, korzystając ze wzorów dostępnych w literaturze

$$I_z^1 = \frac{6b(4b)^3}{3} = 128b^4$$

$$I_z^2 = \frac{\pi(3b)^4}{8} = 31,8b^4$$

$$I_z^4 = \frac{(2b)^4}{3} = 5,33b^4$$

W przypadku figury *3* musimy skorzystać z twierdzenia Steiner'a, ponieważ jest ona oddalona od osi z. Znając moment bezwładności figury *3* względem jej osi centralnej z_c^3 oraz odczytując odległość tej osi od osi z z Rys. 1b możemy zapisać

$$I_z^3 = I_{z_c^3}^3 + e_{y^3}^2 A_3 = \frac{4b(3b)^3}{36} + (3b)^2 \cdot 6b^2 = 57b^2$$

Zatem moment bezwładności całej figury względem osi z jest równy

$$I_z = I_z^1 + I_z^2 - I_z^3 - I_z^4 = 128b^4 + 31,8b^4 - 57b^4 - 5,33b^4 = 97,47b^4$$

Teraz, korzystając z twierdzenia Steiner'a wyznaczamy moment względem osi centralnej z_c

$$I_{z_c} = I_z - e_y^2 A = 97,47b^4 - (0,57b)^2 \cdot 38,14b^4 = 88,33b^4$$

Sposób drugi

Zadanie można rozwiązać innym sposobem, korzystając bezpośrednio z twierdzenia Steiner'a.

Moment bezwładności jest wielkością addytywną, więc wartość momentu bezwładności całej figury względem osi centralnej będzie sumą momentów bezwładności figur składowych względem tej osi

$$I_{z_c} = I^1_{z_c} + I^2_{z_c} - I^3_{z_c} - I^4_{z_c}$$

Zgodnie z twierdzeniem, moment bezwładności danej figury składowej $I^i_{z_c}$ względem osi centralnej całej figury z_c będzie równy

$$I^i_{z_c} = I^i_{z^i_c} + e^2_{y^i} A_i$$

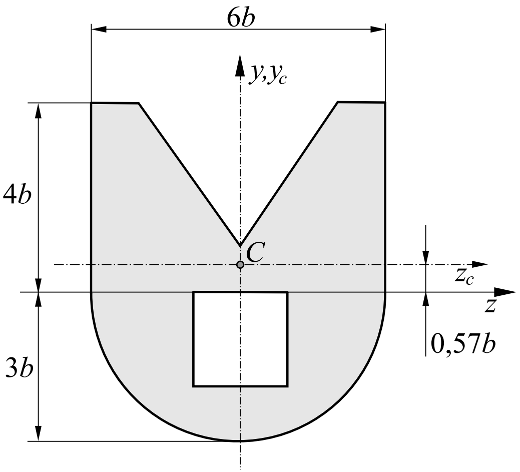
gdzie $e^2_{y^i}$ jest odległością między osią centralną całej figury z_c a osią centralną figury składowej z^i_c, natomiast A_i jest polem powierzchni figury składowej. Ostatecznie mamy

$$I_{z_c} = \sum_{i=1}^{4} \left(I^i_{z^i_c} + e^2_{y^i} A_i \right)$$

Korzystając ze znanych wzorów na momenty bezwładności figur prostych względem ich osi centralnych oraz odczytując odległości między osiami z Rys. 1b możemy zapisać

$$\begin{aligned} I_{zc} &= \left(\frac{6b(4b)^3}{12} + (1,43b)^2 \cdot 24b^2 \right) + \left(0,11(3b)^4 + (1,84b)^2 \cdot \frac{\pi}{2} 9b^2 \right) - \\ &- \left(\frac{4b(3b)^3}{36} + (2,43b)^2 \cdot 6b^2 \right) - \left(\frac{(2b)^4}{12} + (1,57b)^2 \cdot 4b^2 \right) = 88,23b^4 \end{aligned}$$

Różnica w wartościach momentu I_{zc} uzyskanych dwoma powyższymi podejściami wynika z zaokrągleń na poszczególnych etapach obliczeń.



Rys. 3: Położenie osi centralnych