Projektowanie układów prętowych

Zadania wytrzymałości materiałów można podzielić na dwie grupy. Pierwsza z nich, to zadania z zakresu analizy konstrukcji. Dotyczą one wyznaczania naprężeń i odkształceń istniejącej konstrukcji z zależności

$$\sigma = \frac{F}{A}, \qquad \Delta l = \frac{Fl}{EA}.$$

Jeśli podany jest materiał, z jakiego wykonana jest konstrukcja, można wyznaczyć współczynnik bezpieczeństwa

$$\sigma \leq \sigma_{dop} \;\rightarrow\; \frac{F}{A} = \frac{R_e}{n_e} \;\rightarrow\; n_e = \frac{R_e A}{F}.$$

Druga grupa zadań, to zadania o charakterze projektowym. Mając dane dotyczące obciążeń i materiału, dobiera się parametry geometryczne konstrukcji. Punktem wyjścia są tu warunki wytrzymałościowy i sztywnościowy

$$\sigma \leq \sigma_{dop}, \qquad \Delta l \leq \Delta l_{dop}.$$

Dla czystego rozciągania i ściskania przyjmują one postać

$$\frac{F}{A} \leq \frac{R_e}{n_e}, \qquad \frac{Fl}{EA} \leq \Delta l_{dop}.$$

W zależności od sformułowania zadania z powyższych nierówności wyznaczamy szukaną wielkość. Jeśli jest nią pole przekroju poprzecznego, to mamy:

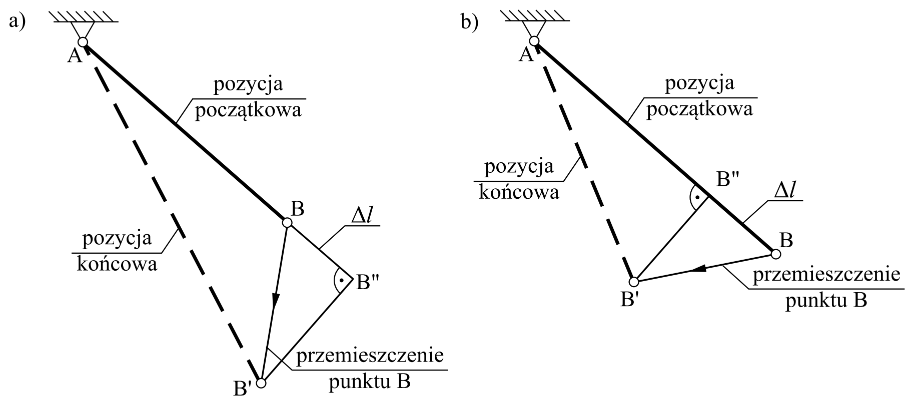
$$A \geq \frac{n_e F}{R_e}, \qquad A \geq \frac{Fl}{\Delta l_{dop} E}.$$

Jeśli przekrój poprzeczny jest okręgiem, to $A = (\pi d^2)/4$, a powyższe nierówności przyjmują postać

$$d \geq \sqrt{\frac{4 n_e F}{\pi R_e}}, \qquad d \geq \sqrt{\frac{4Fl}{\pi \Delta l_{dop} E}}.$$

Formuły te pozwalają wyznaczyć minimalną średnicę pręta, spełniającego warunki wytrzymałościowy i sztywnościowy.

Przy analizie deformacji układów prętowych przyjmuje się, że kąty między poszczególnymi prętami nie zmieniają się a przemieszczenia są małe. W konsekwencji przemieszczenia punków opisuje się w sposób przedstawiony na Rys. 1.



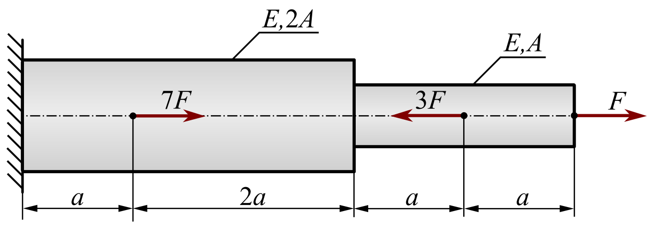
Rys. 1: Analiza przemieszczeń punków pręta: a) rozciąganego; b) ściskanego

W przypadku pręta rozciąganego punkt B przemieszcza się wzdłuż osi pręta o wartość równą wydłużeniu Δl, a następnie przemieszcza się po prostej prostopadłej do osi pręta („obrót” wokół punktu A). Natomiast w przypadku pręta ściskanego punk B przemieszcza się wzdłuż osi pręta o wartość równą skróceniu Δl, a następnie przemieszcza się po prostej prostopadłej do osi pręta („obrót” wokół punktu A).

Pręt o zmiennym przekroju, obciążony układem sił

Przykład

Dla pręta o zmiennym przekroju przedstawionego na Rys. 2 obciążonego układem sił wyznaczyć wartości sił i naprężeń w poszczególnych przekrojach oraz przemieszczenia punktów charakterystycznych.

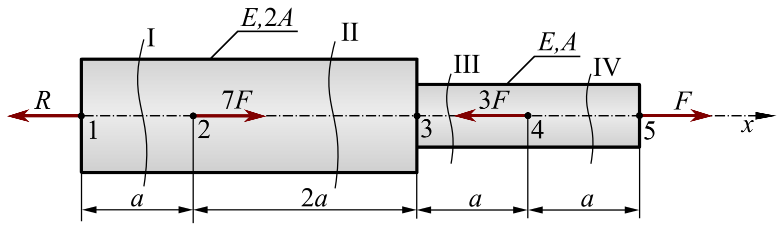


Rys. 2: Pręt stopniowany obciążony kilkoma siłami statycznie wyznaczalny

W pierwszej kolejności wprowadzamy układ współrzędnych, oś x, oraz oznaczenia punków charakterystycznych i uwalniamy układ od więzów. W tym przypadku będzie tylko jedna reakcja R w utwierdzeniu. Z równania równowagi rzutów sił na oś x (Rys. 3) wyznaczamy wartość reakcji

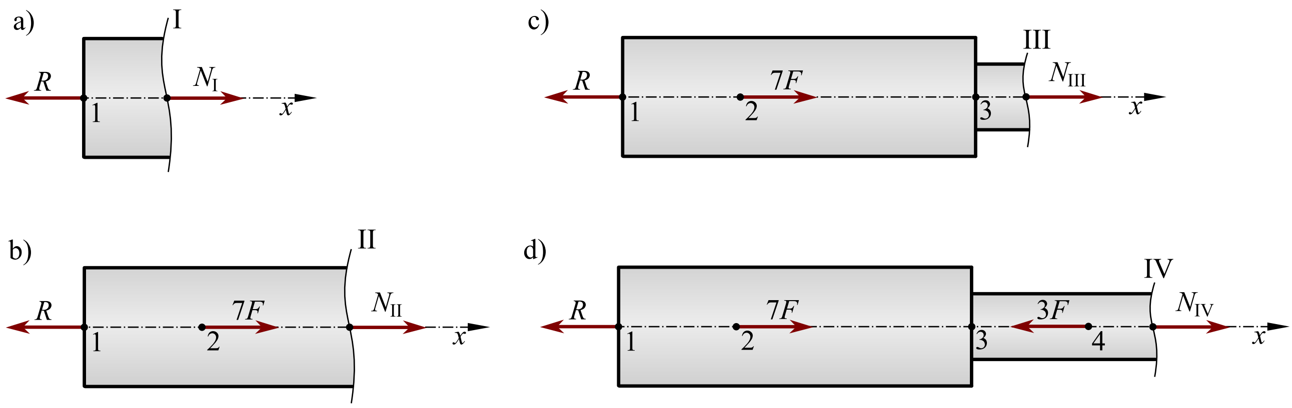
$$\sum F_x = -R + 7F - 3F + F = 0 \quad \text{stąd} \quad R = 5F$$

Następnie definiujemy w pręcie przedziały zmienności. Zgodnie z Rys. 3 będą cztery takie przedziały. Aby wyznaczyć siły wewnętrzne w pręcie, wewnątrz każdego przedziału dokonu-



Rys. 3: Pręt stopniowany obciążony kilkoma siłami statycznie wyznaczalny

jemy przekroju myślowego. Rozpoczynamy od przedziału pierwszego, między punktami 1-2, oznaczonego jako I. Odrzucamy prawą część pręta, a pozostałą część rysujemy wraz z obciążeniem jakie pozostało. Na przekroju wprowadzamy siłę wewnętrzną N_I skierowaną od przekroju. Schemat przedstawiony jest na Rys. 4a. Dla tak zdefiniowanego układu zapisujemy równanie



Rys. 4: Pręt stopniowany obciążony kilkoma siłami statycznie wyznaczalny

równowagi. Analogicznie postępujemy dla trzech pozostałych przedziałów.
Przedział I:

$$\sum F_x = -R + N_I = 0 \quad \text{stąd} \quad N_I = 5F$$

Przedział II:

$$\sum F_x = -R + 7F + N_{II} = 0 \quad \text{stąd} \quad N_{II} = -2F$$

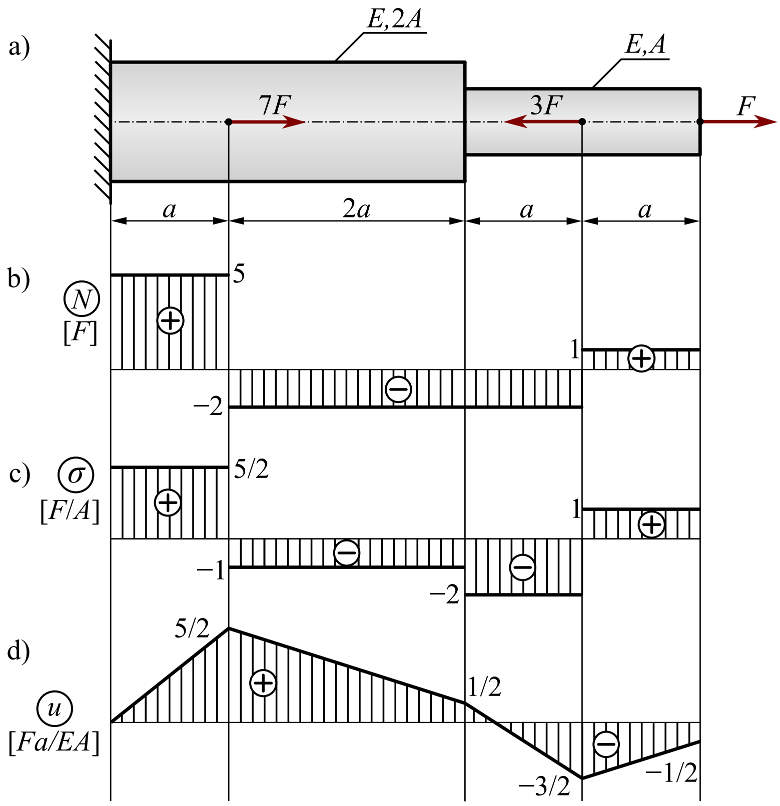
Przedział III:

$$\sum F_x = -R + 7F + N_{III} = 0 \quad \text{stąd} \quad N_{III} = -2F$$

Przedział IV:

$$\sum F_x = -R + 7F - 3F + N_{IV} = 0 \quad \text{stąd} \quad N_{IV} = F$$

Rozwiązanie nanosimy na wykres przedstawiony na Rys. 5b. Należy zauważyć, że siła w przedziale II i III jest taka sama. Wynika to stąd, że przedziały te różnią się tylko polem przekroju; obciążenie na nie działające jest takie samo.



Rys. 5: Pręt stopniowany obciążony kilkoma siłami statycznie wyznaczalny

Kolejnym krokiem jest wyznaczenie naprężeń w poszczególnych przedziałach. Dla czystego rozciągania (ściskania) pojawiają się naprężenia normalne σ, których wartość wyznaczamy dzieląc działającą w pręcie siłę wewnętrzną N przez pole przekroju pręta A. W rozpatrywanym przypadku mamy:

Przedział I:

$$\sigma_I = \frac{N_I}{A_I} = \frac{5F}{2A} = 2,5\frac{F}{A}$$

Przedział II:

$$\sigma_{II} = \frac{N_{II}}{A_{II}} = \frac{-2F}{2A} = -\frac{F}{A}$$

Przedział III:

$$\sigma_{III} = \frac{N_{III}}{A_{III}} = \frac{-2F}{A} = -2\frac{F}{A}$$

Przedział IV:

$$\sigma_{IV} = \frac{N_{IV}}{A_{IV}} = \frac{F}{A}$$

Wykres naprężeń przedstawiono na Rys. 5c. Pozwala on znaleźć przekroje niebezpieczne pręta, czyli takie, w których występują największe naprężenia. Wykres naprężeń jest również wskazówką do tego, jak efektywnie ukształtować pręt. W miejscu małych naprężeń można zmniejszyć przekrój pręta, redukując tym samym jego masę. Należy jednak pamiętać, że zmniejszenie przekroju pociąga za sobą zmniejszenie sztywności, czyli zwiększenie deformacji.

Ostatnim krokiem jest przygotowanie wykresu przemieszczeń punków pręta. Ponieważ przemieszczenie dowolnego punktu pręta zależy od wydłużenia pręta, które jest funkcją liniową współrzędnej x, wykres przemieszczeń jest również funkcją liniową. Ponadto, wykres przemieszczeń musi być funkcja ciągłą, ponieważ brak ciągłości przemieszczeń oznaczałby przerwanie pręta. Zatem, aby wyznaczyć wykres przemieszczeń punktów pręta wystarczy wyznaczyć przemieszczenia punktów charakterystycznych i połączyć je liniami prostymi.

Przemieszczenie punktu pierwszego u_1 jest równe zeru, ponieważ w tym punkcie pręt jest utwierdzony. Przemieszczenie punktu drugiego u_2 jest równe wydłużeniu pierwszego przedziału pręta Δl_{1-2}. Przemieszczenie punktu trzeciego u_3 jest równe sumie wydłużeń przedziału pierwszego Δl_{1-2} i drugiego Δl_{2-3}. Podobnie dla punktu czwartego i końcowego – przemieszczenie końca pręta jest równe sumie wydłużeń wszystkich przedziałów pręta. W rozpatrywanym przypadku mamy:
Przemieszczenie punktu 1:

$$u_1 = 0$$

Przemieszczenie punktu 2:

$$u_2 = \Delta l_{1-2} = \frac{N_I l_I}{EA_I} = \frac{5Fa}{2EA} = 2,5\frac{Fa}{EA}$$

Przemieszczenie punktu 3:

$$u_3 = \Delta l_{1-2} + \Delta l_{2-3} = \frac{N_I l_I}{EA_I} + \frac{N_{II} l_{II}}{EA_{II}} = \frac{5Fa}{2EA} - \frac{4Fa}{2EA} = 0,5\frac{Fa}{EA}$$

Przemieszczenie punktu 4:

$$u_4 = \Delta l_{1-2} + \Delta l_{2-3} + \Delta l_{3-4} = \frac{N_I l_I}{EA_I} + \frac{N_{II} l_{II}}{EA_{II}} + \frac{N_{III} l_{III}}{EA_{III}} = \frac{5Fa}{2EA} - \frac{4Fa}{2EA} - \frac{2Fa}{EA} = -1,5\frac{Fa}{EA}$$

Przemieszczenie punktu 5:

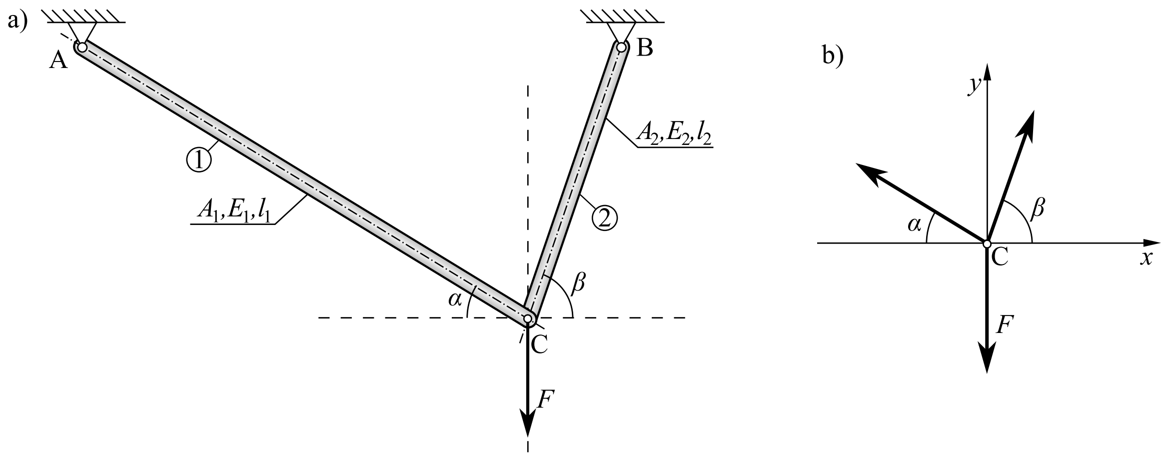
$$u_5 = u_4 + \Delta l_{4-5} = u_4 + \frac{N_{IV} l_{IV}}{EA_{IV}} = -1,5\frac{Fa}{EA} + \frac{Fa}{EA} = -0,5\frac{Fa}{EA}$$

Na podstawie powyższych obliczeń buduje się wykres przemieszczeń przedstawiony na Rys. 5d. Z wykresu można odczytać przemieszczenie dowolnego punktu pręta. Widać, że w przedziale trzecim znajduje się punkt, który się nie przemieszcza. Wartości dodatnie na wykresie oznaczają, że odpowiadające im punkty przemieszczają się w prawo. Te, którym odpowiadają wartości ujemne, przemieszczają się w lewo. Dla przykładu, koniec pręta, punkt 5, przemieści się w lewo o $0,5(Fa)/(EA)$ (pomimo tego, że w tym punkcie przyłożona jest siła skierowana przeciwnie).

Układy prętów

Przykład

Układ dwóch prętów połączonych przegubowo, obciążony jest siłą pionową F. Wyznaczyć siły i naprężenia w prętach oraz przemieszczenie punktu C wywołane obciążeniem (Rys. 8a).



Rys. 6: Układ dwóch prętów; statycznie wyznaczalny

Rozwiązywanie zadania rozpoczynamy od wyznaczenia sił w prętach, które będą działały wzdłuż osi prętów. Z rysunku widać, że oba pręty będą rozciągane. Od wartości sił rozciągających będzie zależało wydłużenie prętów, a od wydłużenia przemieszczenie punktu C.

Chcąc wyznaczyć wartości sił wewnętrznych przecinamy myślowo pręty, a w miejscu przekroju wprowadzamy siły normalne N_1 i N_2 skierowane od przekroju. Tworzą one z obciążeniem F zbieżny układ sił przedstawiony na Rys. 6b. Siły wewnętrzne otrzymamy z rozwiązania równań równowagi:

$$\sum F_x = -N_1 \cos\alpha + N_2 \cos\beta = 0$$

$$\sum F_y = N_1 \sin\alpha + N_2 \sin\beta - F = 0$$

Z rozwiązania powyższego układu otrzymamy:

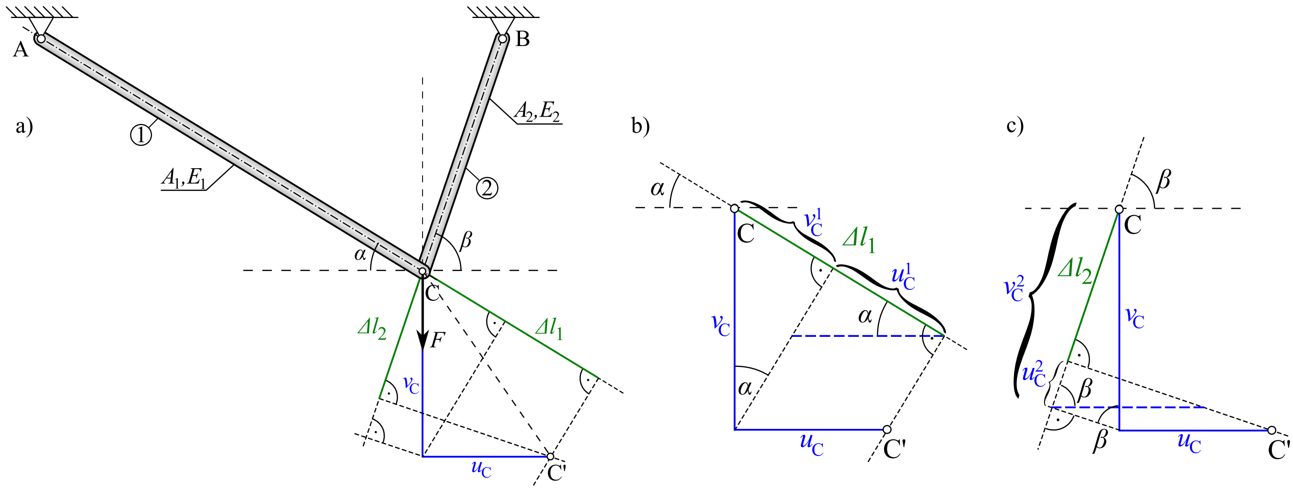
$$N_1 = F\frac{\cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)} \quad \text{oraz} \quad N_2 = F\frac{\cos\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$$

Naprężenia w prętach mają zatem wartości:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{F}{A_1}\frac{\cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)} \quad \text{oraz} \quad \sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{F}{A_2}\frac{\cos\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$$

Znajdźmy nowe położenie punku C. Przed obciążeniem końce obu prętów były połączone w punkcie C. Po obciążeniu, niezależnie od wartości wydłużeń obu prętów, ich końce w dalszym ciągu będą ze sobą połączone, ale już w punkcie C'. Zgodnie z założeniami przyjętymi na Rys. 1 koniec pręta pierwszego, wskutek wydłużenia, przemieści się wzdłuż osi pręta o Δl_1, a następnie przemieści się wzdłuż prostej prostopadłej do osi pręta. Podobnie koniec pręta drugiego, wskutek wydłużenia przemieści się wzdłuż osi pręta o Δl_2, a następnie przemieści wzdłuż prostej prostopadłej do osi pręta. Punkt przecięcia trajektorii końców obu prętów wyznacza nowe położenie punktu C. Zilustrowano to na Rys. 7a.

Przemieszczenie CC' można rozłożyć na dwie składowe: poziomą u_C i pionową v_C. Składowe te można wyznaczyć wiążąc je z wydłużeniami prętów. Zacznijmy od wydłużenia pręta pierwszego. Zgodnie z Rys. 7b wydłużenie Δl_1 jest sumą rzutów prostokątnych składowych



Rys. 7: Układ dwóch prętów; statycznie wyznaczalny

przemieszczenia na kierunek pręta pierwszego. Jeśli rzut składowej poziomej oznaczymy jako u_C^1, a rzut składowej pionowej jako v_C^1, to możemy zapisać, że:

$$\Delta l_1 = u_C^1 + v_C^1.$$

Podobnie dla pręta drugiego (Rys. 7c): jego wydłużenie Δl_2 jest równe różnicy rzutu składowej pionowej v_C^2 i rzutu składowej poziomej u_C^2, czyli

$$\Delta l_2 = v_C^2 - u_C^2.$$

Wartości poszczególnych rzutów składowych znajdujemy analizując związki trygonometryczne w odpowiednich trójkątach. Dla rozpatrywanego przykładu będzie:

$$\begin{cases} \Delta l_1 = u_C^1 + v_C^1 = u_C \cos\alpha + v_C \sin\alpha \\ \Delta l_2 = v_C^2 - u_C^2 = v_C \sin\beta - u_C \cos\beta \end{cases}$$

Ostateczną postać układu równań otrzymamy podstawiając zależności na wydłużenia

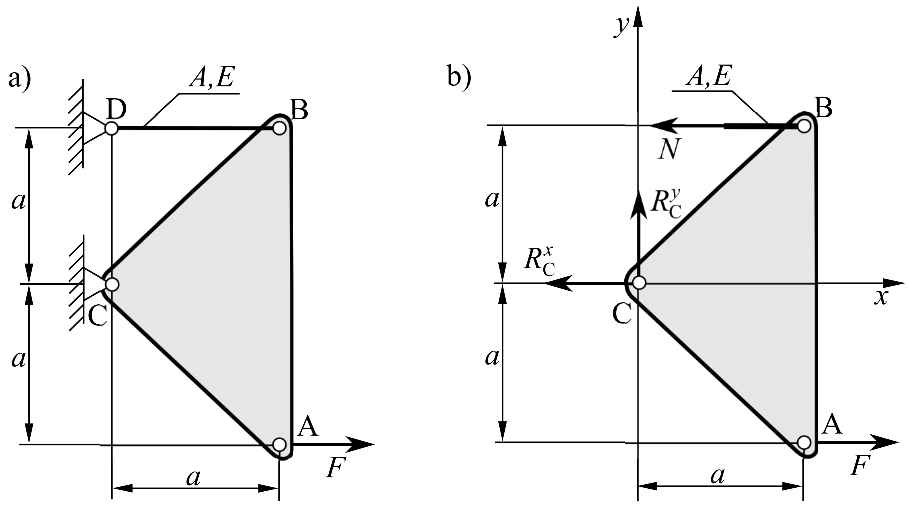
$$\begin{cases} \dfrac{Fl_1}{E_1A_1}\dfrac{\cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)} = u_C \cos\alpha + v_C \sin\alpha \\ \dfrac{Fl_2}{E_2A_2}\dfrac{\cos\alpha}{\sin(\alpha+\beta)} = v_C \sin\beta - u_C \cos\beta \end{cases}$$

W powyższym układzie jedyne niewiadome to składowe przemieszczenia. Rozwiązując układ, wyznaczymy u_C i v_C, a na ich podstawie przemieszczenie CC'.

Układ pręt-ciało sztywne

Przykład

Ciało sztywne ABC podparte jest przegubowo w punkcie C. Ponadto wspierane jest prętem BD. Obciążenie w postaci siły skupionej F przyłożone jest w punkcie A. Wyznaczyć siłę i naprężenia w pręcie oraz przemieszczenie punktu A (Rys. 8a).



Rys. 8: Układ pręt-ciało sztywne; statycznie wyznaczalny

Wprowadźmy układ współrzędnych w punkcie C. Aby wyznaczyć siłę w pręcie, przecinamy go, a na przekroju wprowadzamy siłę wewnętrzną N. Ponadto uwalniamy układ od więzów. Układ taki przedstawiony jest na Rys. 8b. Ponieważ mamy dwie reakcje w punkcie C oraz siłę w pręcie, zadanie jest statycznie wyznaczalne. Ponieważ nie interesują nas reakcje w podporze, spróbujmy napisać takie równanie równowagi, w którym tych reakcji nie będzie, natomiast będzie tam szukana siła N. Równaniem takim będzie suma momentów względem punktu C

$$\sum M_C = Fa + Na = 0 \quad \text{stąd} \quad N = -F \tag{1}$$

Zatem naprężenia w pręcie są równe

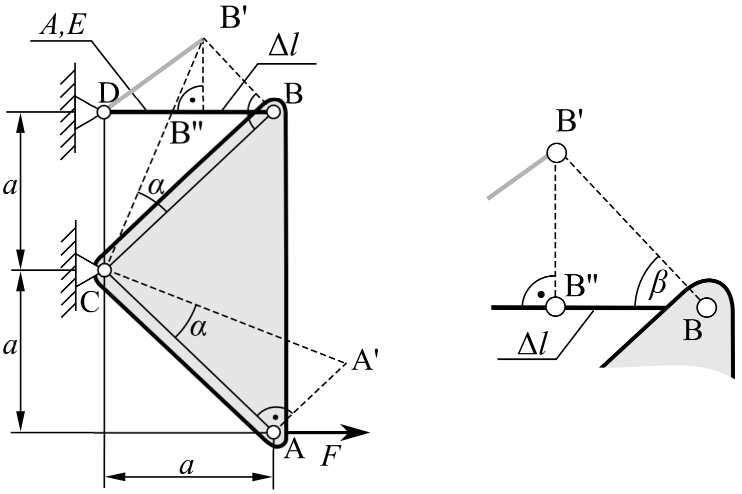
$$\sigma = -\frac{F}{A},$$

co oznacza, że pręt jest ściskany.

Przemieszczenie poszczególnych punków ciała sztywnego zależy od tego, jak zachowa się pręt BD. W tym przypadku od tego, o ile pręt się skróci. Ponieważ znamy parametry geometryczne (A, l) i materiałowe (E) pręta oraz siłę wewnętrzną możemy, z prawa Hooke'a, wyznaczyć jego skrócenie Δl

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA} = -\frac{Fa}{EA}$$

Aby znaleźć przemieszczenie punktu A należy je powiązać ze skróceniem pręta Δl. Przedstawiono to na Rys. 9. Pod działaniem siły F ciało sztywne obróci się względem punktu C przeciwnie do ruchu wskazówek zegara. Przyjmując założenie małych przemieszczeń, punkt A będzie się przemieszczał nie po okręgu, ale po prostej prostopadłej do odcinka AC. Odcinek te obróci się o kąt α podobnie jak odcinek BC, ponieważ punkty A, B i C są punktami tego samego ciała sztywnego. Zatem, aby wyznaczyć przemieszczenie punktu A wystarczy wyznaczyć przemieszczenie punktu B, a to możemy bezpośrednio połączyć z wydłużeniem Δl. Trójkąt BB'B"



Rys. 9: Analiza przemieszczeń punktów układu

jest trójkątem prostokątnym. Analizując geometrię na Rys. 9 możemy wyznaczyć kąt β w tym trójkącie. Zatem, przemieszczenie punktu B będzie równe

$$BB' = \frac{\Delta l}{\cos\beta} = \frac{\sqrt{2}Fa}{EA}.$$

Przemieszczenie punku A można wyznaczyć obliczając kąt α bądź z proporcji, ponieważ trójkąty CBB' i CAA' są podobne. Zatem:

$$\frac{CB}{BB'} = \frac{CA}{AA'}.$$

Z geometrii układu wiemy, że CB=$\sqrt{2}a$, CA=$\sqrt{2}a$, a BB' wyznaczyliśmy wcześniej. Mamy zatem

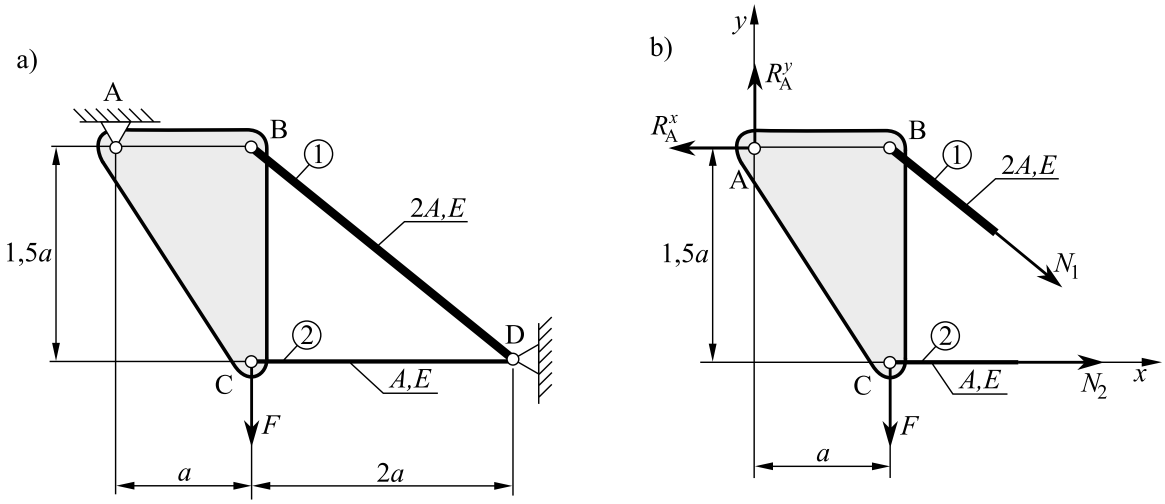
$$\frac{\sqrt{2}aEA}{\sqrt{2}Fa} = \frac{\sqrt{2}a}{AA'} \rightarrow AA' = \frac{\sqrt{2}Fa}{EA}$$

Przemieszczenia punktów A i B są takie same, ponieważ są tak samo oddalone od punku obrotu C. W analogiczny sposób można wyznaczyć przemieszczenie dowolnego punktu układu.

Układ pręty-ciało sztywne

Przykład

Ciało sztywne ABC podparte jest przegubowo w punkcie A. Ponadto wspierane jest prętami 1 i 2. Obciążenie w postaci siły skupionej F przyłożone jest w punkcie C. Wyznaczyć siły i naprężenia w prętach 1 i 2 oraz przemieszczenie punktu C (Rys. 10a).



Rys. 10: Układ pręt-ciało sztywne; statycznie niewyznaczalny

Aby wyznaczyć siły w prętach, przecinamy je, a na przekrojach wprowadzamy siły wewnętrzne N_1 i N_2. Ponadto uwalniamy układ od więzów. Układ taki przedstawiony jest na Rys. 10b. Zadanie jest jednokrotnie statycznie niewyznaczalne – mamy cztery niewiadome: dwie siły wewnętrzne i dwie reakcje w punkcie A. Zgodnie z zasadami statyki, dla płaskiego układu sił możemy zapisać tylko trzy niezależne równania równowagi. Będziemy więc potrzebowali dodatkowego równania, które można otrzymać z analizy przemieszczeń konstrukcji.

Obliczenia zaczynamy od zapisania równania równowagi, które powiąże obciążenie z siłami wewnętrznymi. Będzie to suma momentów względem punktu A

$$\sum M_A = Fa + \frac{3}{5}aN_1 - \frac{3}{2}aN_2 = 0 \quad \text{stąd} \quad \frac{3}{2}N_2 - \frac{3}{5}N_1 = F \tag{2}$$

Równanie geometryczne otrzymamy zauważając, że każdy punkt ciała sztywnego obraca się wokół punktu A proporcjonalnie do jego odległości od tego punktu. Zatem, zgodnie z Rys. 11, prawdziwa jest zależność

$$\frac{BB'}{AB} = \frac{CC'}{AC} \;\rightarrow\; \frac{BB'}{a} = \frac{2CC'}{\sqrt{13}a} \;\rightarrow\; CC' = \frac{\sqrt{13}}{2}BB' \tag{3}$$

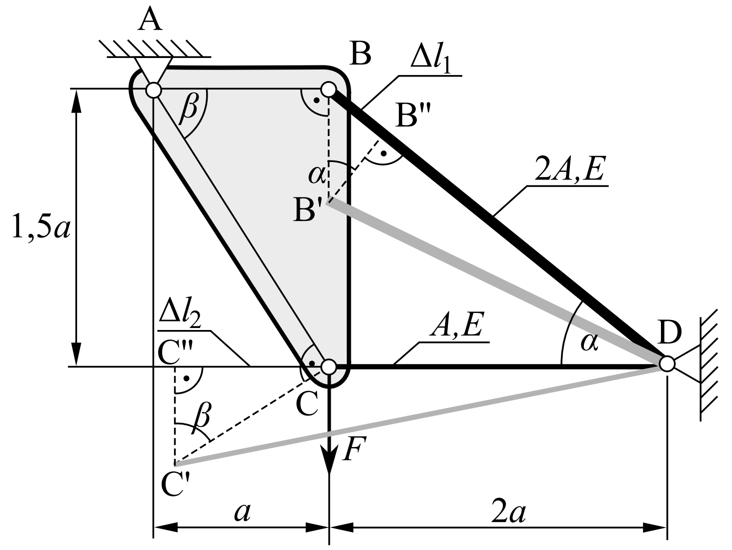
Pozostaje jedynie powiązać przemieszczenia BB' oraz CC' z wydłużeniem (skróceniem) prętów Δl_1 oraz Δl_2.

Z trójkątów BB'B" oraz BCD mamy

$$\sin\alpha = \frac{\Delta l_1}{BB'} \quad \text{oraz} \quad \sin\alpha = \frac{3}{5} \quad \text{zatem} \quad BB' = \frac{5}{3}\Delta l_1$$

Z trójkątów CC'C" oraz ABC mamy

$$\sin\beta = \frac{\Delta l_2}{CC'} \quad \text{oraz} \quad \sin\beta = \frac{3}{\sqrt{13}} \quad \text{zatem} \quad CC' = \frac{\sqrt{13}}{3}\Delta l_2$$



Rys. 11: Analiza przemieszczeń punktów układu

Podstawiając powyższe do (3) mamy

$$\Delta l_2 = \frac{5}{2}\Delta l_1 \tag{4}$$

Wydłużenie (skrócenie) poszczególnych prętów można wyznaczyć z prawa Hooke'a

$$\Delta l_1 = -\frac{N_1 l_1}{EA_1} = -\frac{5}{4}\frac{N_1 a}{EA} \quad \Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{EA_2} = 2\frac{N_2 a}{EA}$$

Równanie geometryczne przyjmuje zatem postać

$$N_2 = -\frac{25}{16}N_1 \tag{5}$$

Równania (2) i (5) tworzą układ, pozwalający wyznaczyć siły w prętach

$$N_1 = -0,34F, \quad N_2 = 0,53F$$

Mając siły w prętach możemy wyznaczyć naprężenia

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = -\frac{0,34F}{2A} = -0,17\frac{F}{A} \quad \sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{0,53F}{A} = 0,53\frac{F}{A}$$

Przemieszczenie CC' wyznaczymy z wyprowadzonej wcześniej zależności

$$CC' = \frac{\sqrt{13}}{3}\Delta l_2$$

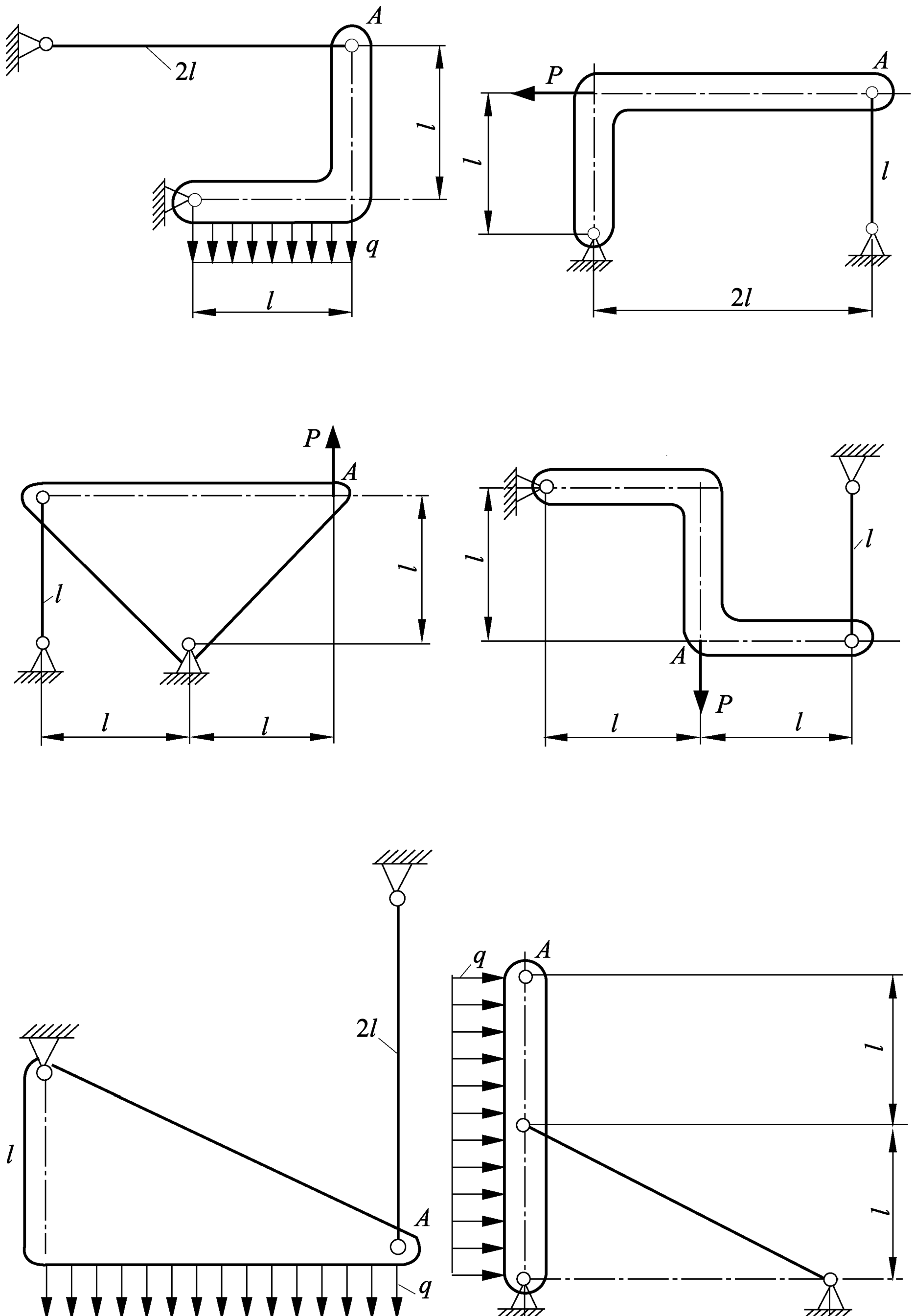
Z poprzednich wyliczeń mamy

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 2a}{AE} \quad \text{oraz} \quad N_2 = 0,53F$$

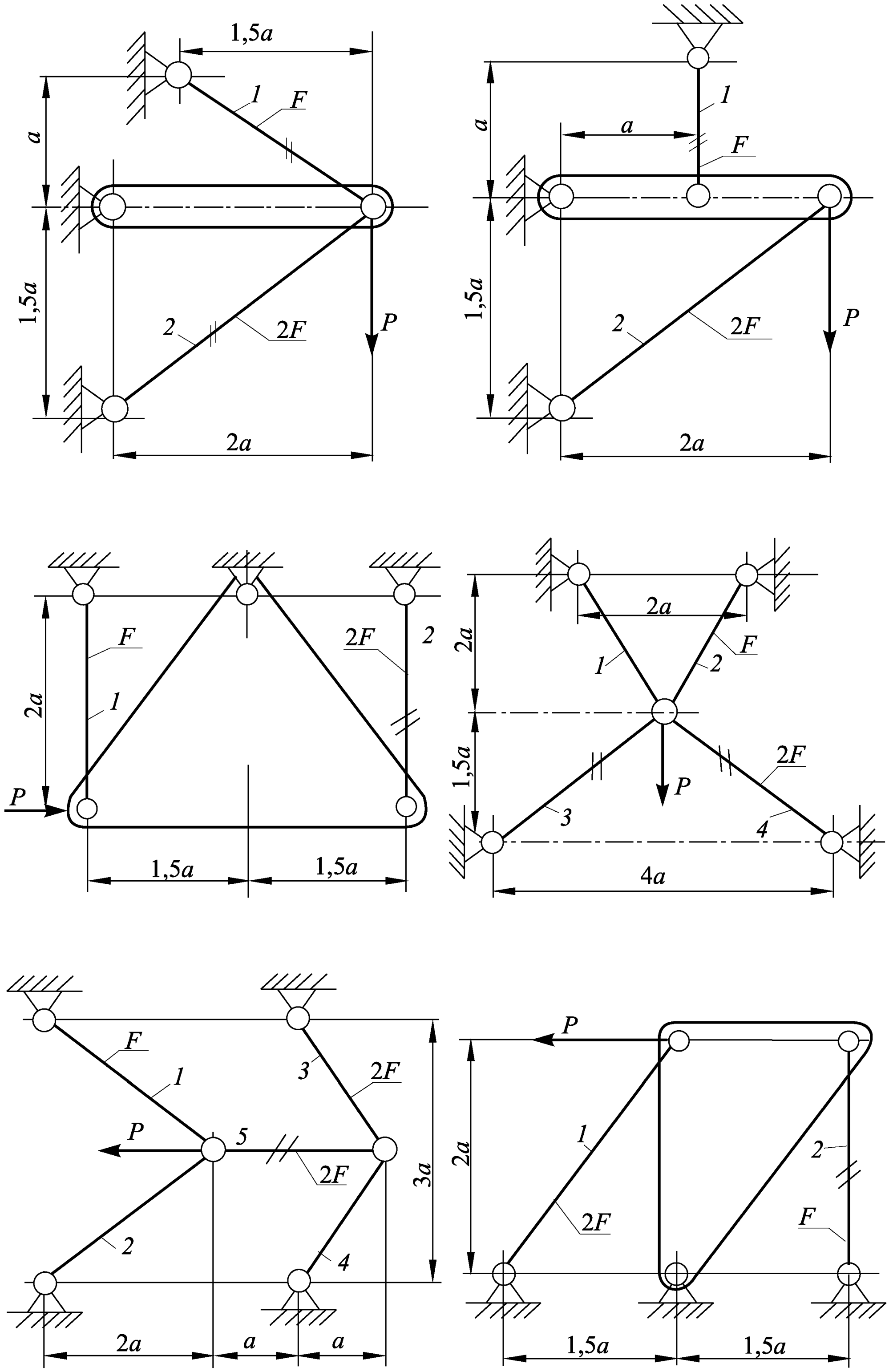
zatem

$$CC' = \frac{\sqrt{13}}{3}\frac{N_2 2a}{AE} = \frac{\sqrt{13}}{3}\frac{2a}{AE}0,53F = 1,27\frac{Fa}{EA}$$

We wszystkich zadaniach celem jest wyznaczenie sił w prętach oraz wyznaczenie przemieszczeń wybranych punków. Każdy wynik powinien zawierać tylko wielkości znane, czyli siłę P lub intensywność q, długość l lub a, pole przekroju F oraz moduł Younga E.



Rys. 12: Układy statycznie wyznaczalne



Rys. 13: Układy statycznie niewyznaczalne