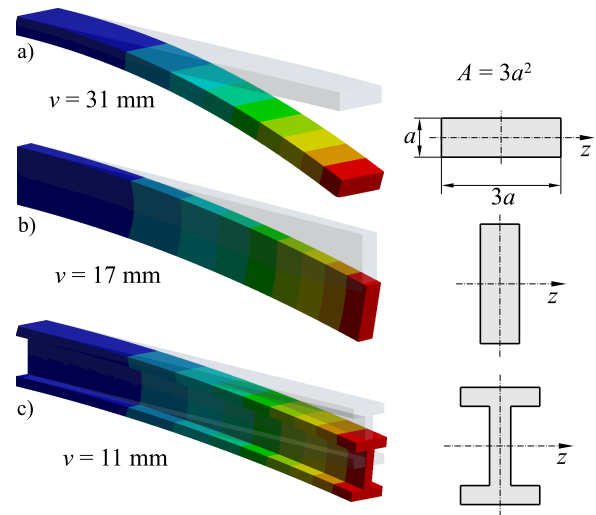


Parametry geometryczne przekroju poprzecznego

Wprowadzenie

Modelując liniowe elementy konstrukcyjne typu pręt, wał czy belka, upraszczamy je do linii prostej, rzadziej zakrzywionej, i przypisujemy do niej przekrój poprzeczny. Siły wewnętrzne działające w takim elemencie przykładają się do środka ciężkości przekroju poprzecznego. Należy zatem wiedzieć, jak ten środek wyznaczyć. Z kolei określenie wartości naprężeń na przekroju elementu konstrukcyjnego zależy od kształtu i wielkości tego przekroju. Potrzebne są więc parametry opisujące ten przekrój.

W przypadku rozciągania i ściskania kształt przekroju nie ma znaczenia, ponieważ wartość naprężeń zależy tylko od wartości pola przekroju. W przypadku skręcania i zginania, oprócz pola przekroju, liczy się jego kształt. Ma on również wpływ na sztywność konstrukcji, co widać na Rys. 1. Wszystkie trzy przedstawione belki wspornikowe mają przekrój poprzeczny o takim samym polu powierzchni, równym $3a^2$, jednak kształt przekroju jest inny. W pierwszym przypadku jest to płaskownik, w drugim taki sam płaskownik, jednak obrócony o 90° , a w ostatnim jest to dwuteownik. Dobierając odpowiednio kształt, można kilkakrotnie zwiększyć sztywność konstrukcji bez zwiększania jej masy, co widać po porównaniu ugięć końca belki, oznaczonych na rysunku literą v .



Rys. 1: Porównanie sztywności belek

Wielkościami, które pozwalają scharakteryzować przekrój poprzeczny są środek ciężkości, pole przekroju, moment statyczny, moment bezwładności i moment odśrodkowy. Ich znajomość jest konieczna do wyznaczenia rozkładu naprężeń w wale lub belce, ale również pozwala na efektywne kształtowanie tych elementów konstrukcyjnych. Efektywność oznacza tu maksymalizację stosunku wartości naprężeń lub ugięcia do masy elementu konstrukcyjnego.

Moment statyczny i środek ciężkości

Podstawowym parametrem opisującym przekrój poprzeczny jest jego pole. Wyrażamy je zależnością

$$A = \int_A dA = \sum_{i=1}^n A_i \quad (1)$$

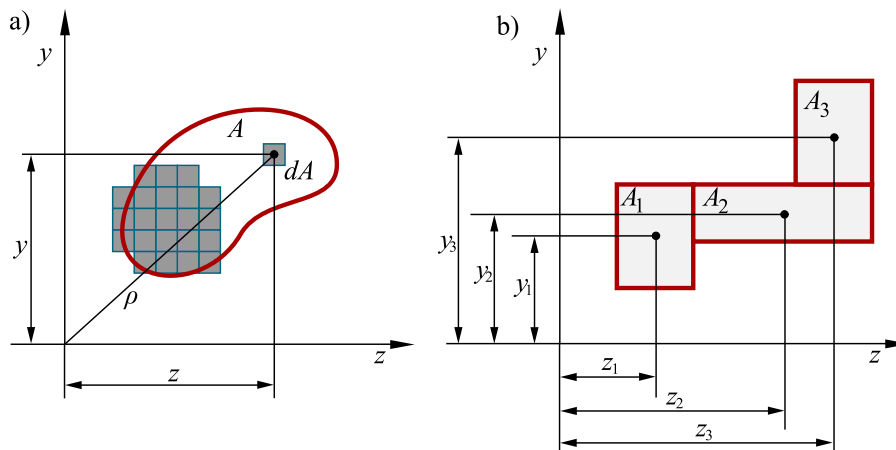
Zależność powyższa pozwala na wyznaczenie pola powierzchni w ogólnym przypadku oraz w przypadku, gdy przekrój złożony składa się z kilku figur prostych.

Nową wielkością, którą zdefiniujemy, jest moment statyczny, oznaczony literą S z odpowiednim indeksem dolnym wskazującym oś, względem której moment jest liczony. Zgodnie z Rys. 2a dla osi z moment statyczny S_z definiujemy jako całkę po obszarze A z iloczynu odległości y elementarnego wycinka dA od osi z i pola tego wycinka, czyli

$$S_z = \int_A y dA = \sum_{i=1}^n y_i A_i, \quad S_y = \int_A z dA = \sum_{i=1}^n z_i A_i \quad (2)$$

Jednostką momentu statycznego jest $[\text{mm}^3]$. W przypadku figury złożonej z kilku figur prostych,

jak na Rys. 2b będzie to suma iloczynów odległości środków ciężkości poszczególnych figur od wybranej osi i pól powierzchni tych figur.



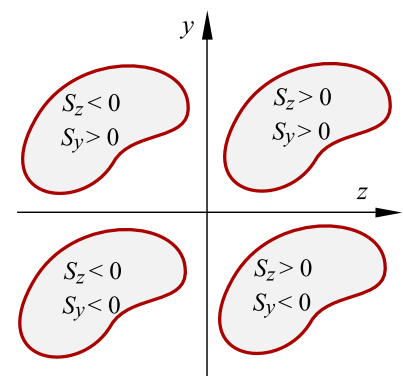
Rys. 2: Definicja pola powierzchni

Z definicji momentu statycznego wynika, że jego wartość zależy od odległości figury od wybranej osi oraz jej pola powierzchni, a jego znak zależy od położenia figury w układzie współrzędnych. Możliwe przypadki przedstawiono na Rys. 3.

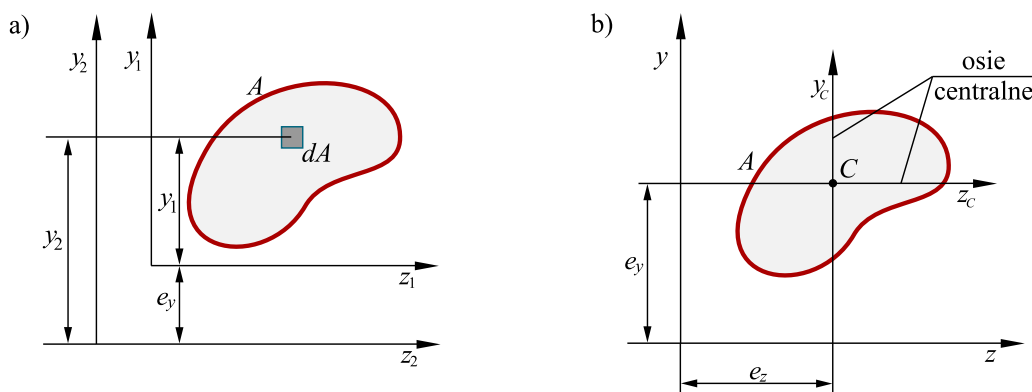
Można zauważyć, że jeśli figura znajduje się w całości ponad osią z, to moment statyczny będzie dodatni. Jeśli z kolei znajduje się pod osią, to moment będzie ujemny. Istnieje zatem takie położenie, dla którego moment statyczny będzie równy zero. Taka oś, względem której moment statyczny jest zerowy nazywa się osią centralną. Przechodzi ona przez środek ciężkości przekroju, który definiuje się jako punkt przecięcia dwóch osi centralnych, poziomej i pionowej.

Inną ważną cechą momentu statycznego jest jego addytywność. Znając momenty statyczne figur prostych, składających się na figurę złożoną, możemy wyznaczyć moment statyczny tej ostatniej poprzez zsumowanie momentów statycznych figur prostych $S_z(A) = S_z(A_1) + S_z(A_2) + \dots + S_z(A_n)$.

Moment statyczny pozwala wyprowadzić zależność na wyznaczenie środka ciężkości figury. Aby to zrobić, rozważmy przekrój A, przedstawiony na Rys. 4, umiejscowiony w dwóch układach współrzędnych (z_1, y_1) i (z_2, y_2) . Wyprowadzimy zależność pozwalającą wyznaczyć położenie środka ciężkości względem osi z. Moment statyczny względem



Rys. 3: Znak momentu statycznego



Rys. 4: Przekrój zorientowany w dwóch układach współrzędnych

osi z_2 możemy zapisać

$$S_{z_2} = \int_A y_2 dA$$

Z rysunku widać, że odległość $y_2 = y_1 + e_y$, gdzie e_y jest odległością między osiami poziomymi. Możemy zatem rozpisać powyższą całkę na dwie

$$S_{z_2} = \int_A (y_1 + e_y) dA = \int_A y_1 dA + e_y \int_A dA$$

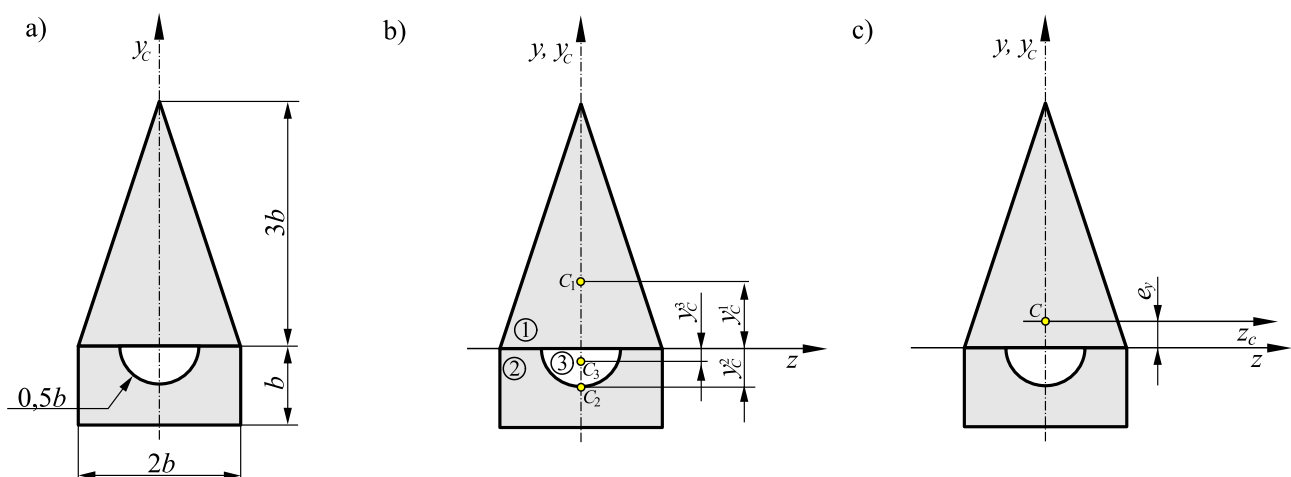
Widać, że pierwsza z całek to moment statyczny względem osi z_1 , a całka druga to pole powierzchni A . Mamy zatem

$$S_{z_2} = S_{z_1} + e_y A$$

Jeżeli przyjmiemy, że oś z_1 jest osią centralną oznaczoną z_C , czyli osią przechodzącą przez środek ciężkości, to moment statyczny $S_{z_1} = S_{z_C} = 0$. Jeśli ponadto przyjmiemy, że oś z_2 jest dowolną osią poziomą oznaczoną jako z , to powyższe równanie przyjmuje postać $S_z = e_y A$. Możemy z tego równania wyznaczyć odległość e_y między osią centralną z_C a inną dowolną osią z , czyli położenie środka ciężkości. W analogiczny sposób można znaleźć położenie środka ciężkości względem osi y . Współrzędne środka ciężkości wyznaczamy zatem z zależności

$$e_z = \frac{S_y}{A} = \frac{\sum_{i=1}^n z_i A_i}{\sum_{i=1}^n A_i}, \quad e_y = \frac{S_z}{A} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i A_i}{\sum_{i=1}^n A_i} \quad (3)$$

W inżynierskich zastosowaniach zwykle używa się powyższych zależności w postaci sumy, co przedstawimy na przykładzie. Zadanie polega na znalezieniu środka ciężkości figury złożonej, która składa się z trójkąta, prostokąta oraz półkolistego wycięcia, jak na Rys. 5. Figura jest symetryczna względem osi pionowej, więc środek ciężkości będzie się znajdował na osi przechodzącej przez płaszczyznę symetrii. Tam też wprowadzimy oś pionową y . Oś poziomą z wprowadzimy tak, aby łatwo było wyznaczyć odległości środków ciężkości poszczególnych figur od tej osi.



Rys. 5: Przykład figury złożonej

Oznaczmy poszczególne figury kolejnymi numerami. Dla ułatwienia obliczeń, wygodnie jest sporządzić tabelę, w którą wpisuje się wyniki cząstkowe dla poszczególnych figur takie jak pola powierzchni A_i , odległości środków ciężkości y_i oraz momenty statyczne S_{z_i} . Wartości dla rozważanego przykładu przedstawiono w tabeli 1.

Tabela 1: Wyniki cząstkowe dla przykładu z Rys. 5

| | A_i | y_i | S_{z_i} |
|---|--------------|------------|-----------|
| 1 | $3b^2$ | b | $3b^3$ |
| 2 | $2b^2$ | $-b/2$ | $-b^3$ |
| 3 | $-\pi b^2/8$ | $-2b/3\pi$ | $b^3/12$ |

Należy zwrócić uwagę, że wartość współrzędnej może być dodatnia lub ujemna. Znak minus pojawia się również przy polu powierzchni, jeżeli stanowi ono wycięcie w figurze. O ile w pierwszym przypadku znak minus nie budzi wątpliwości, to w przypadku drugim jest on formalnie niepoprawny. Ułatwia to jednak prawidłowe rozwiązanie zagadnienia.

Mają wypełnioną tabelę można wyznaczyć współrzędną e_y z zależności

$$e_y = \frac{\sum_{i=1}^n S_{z_i}}{\sum_{i=1}^n A_i} = \frac{3b^3 - b^3 + b^3/12}{3b^2 + 2b^2 - \pi b^2/8} = \frac{2,083b^3}{4,607b^2} = 0,45b$$

Otrzymany punkt nanosimy na rysunek przedstawiający analizowany przekrój poprzeczny. Warto zastanowić się, czy otrzymany wynik jest poprawny. Intuicyjnie widać, że w tym przypadku powinien on znajdować się pomiędzy środkiem ciężkości trójkąta C_1 i środkiem ciężkości prostokąta C_2 . Jeżeli otrzymane położenie punktu nie jest inne niż podpowiada intuicja, może to oznaczać błąd popełniony w obliczeniach.

Momenty bezwładności

Kolejną wielkością, która opisuje przekrój poprzeczny jest osiowy moment bezwładności definiowany jako

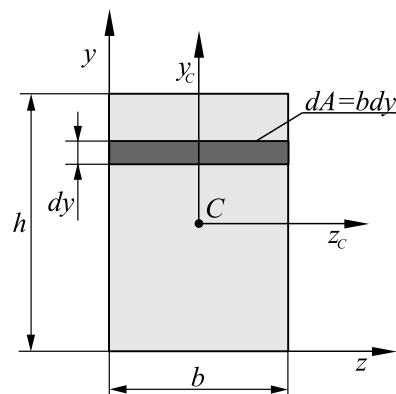
$$I_z = \int_A y^2 dA, \quad I_y = \int_A z^2 dA, \quad (4)$$

czyli kwadrat odległości elementarnego wycinka dA od danej osi przemnożony przez pole powierzchni tego wycinka. Jednostką momentu bezwładności jest zatem $[\text{mm}^4]$. Z definicji widać, że wartość momentu bezwładności jest zawsze dodatnia. Moment ten jest wielkością addytywną, więc w przypadku figury złożonej można wyznaczyć jej moment bezwładności dodając do siebie momenty poszczególnych figur $I_z(A) = I_z(A_1) + I_z(A_2) + \dots + I_z(A_n)$.

Spróbujmy wyprowadzić zależność na moment bezwładności dla prostokąta o szerokości b i wysokości h . Moment wyznaczmy względem osi, przechodzącej przez podstawę, zgodnie z Rys. 6. Zaczynamy od zdefiniowania elementarnego wycinka dA . W tym przypadku może to być nieskończenie cienkie pasmo dy o szerokości b , czyli $dA = bdy$. Zmienną będzie zatem współrzędna y , która zmienia się w granicy od 0 do h . Możemy zatem zapisać

$$I_z = \int_A y^2 dA = b \int_0^h y^2 dy, \quad \text{i ostatecznie} \quad I_z = \frac{bh^3}{3}.$$

Wartości momentów bezwładności wyznaczonych względem wybranych osi, dla prostych figur płaskich, można znaleźć w literaturze. Wykorzystując je, wyznaczmy moment bezwładności figury z przykładu



Rys. 6: Figura płaska w kształcie prostokąta

przedstawionego na Rys. 5 względem osi z , korzystając z zasady addytywności. Moment figury stanowiącej wycięcie odejmuje się. Mamy zatem

$$I_z = I_{z_1} + I_{z_2} - I_{z_3} = \frac{(2b)(3b)^3}{12} + \frac{(2b)(b)^3}{3} - \frac{\pi(0,5b)^4}{8} = \frac{9}{2}b^4 + \frac{2}{3}b^4 - \frac{\pi}{128}b^4 = 5,14b^4.$$

Podobnie można zdefiniować biegunowy moment bezwładności

$$I_0 = \int_A \rho^2 dA, \quad (5)$$

który jest iloczynem pola powierzchni elementarnego wycinka dA i kwadratu jego odległości od początku układu współrzędnych. Ma on zawsze wartość dodatnią. Zgodnie z Rys. 2a możemy zapisać

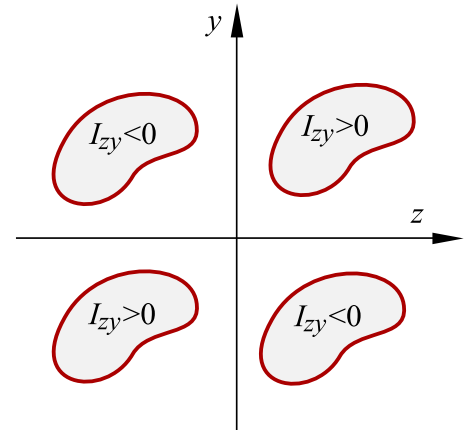
$$I_0 = \int_A \rho^2 dA = \int_A (y^2 + z^2) dA = \int_A y^2 dA + \int_A z^2 dA = I_z + I_y \quad (6)$$

Znając zatem osiowe momenty bezwładności, można wyznaczyć, z zależności $I_0 = I_y + I_z$, moment biegunowy.

Ostatnim parametrem przekroju poprzecznego jest odśrodkowy moment bezwładności definiowany jako

$$I_{zy} = \int_A zy dA \quad (7)$$

Ponieważ jest to iloczyn dwóch współrzędnych, jego znak może być dodatni lub ujemny, w zależności od położenia przekroju względem układu współrzędnych, co przedstawiono na Rys. 7. Możliwa jest zatem również wartość zerowa tego momentu. Będzie to miało miejsce, gdy przynajmniej jedna współrzędna jest równa zero. Osie, względem których moment odśrodkowy jest równy zero, nazywamy osiami głównymi.



Rys. 7: Znak momentu odśrodkowego

Twierdzenie Steinera

Korzystając z Rys. 4 spróbujemy znaleźć zależność między momentami bezwładności względem dwóch, wzajemnie równoległych osi. Moment figury A względem osi z_2 możemy zapisać

$$I_{z_2} = \int_A y_2^2 dA$$

Z rysunku widać, że odległość $y_2 = y_1 + e_y$, gdzie e_y jest odległością między osiami poziomymi. Możemy zatem rozpisac powyższą całkę na trzy całki

$$I_{z_2} = \int_A (y_1 + e_y)^2 dA = \int_A y_1^2 dA + 2e_y \int_A y_1 dA + e_y^2 \int_A dA$$

Widać, że pierwsza z całek po prawej stronie równania to moment bezwładności względem osi z_1 , całka druga, to moment statyczny względem osi z_1 , a trzecia całka to pole powierzchni A . Mamy zatem

$$I_{z_2} = I_{z_1} + 2e_y S_{z_1} + e_y^2 A$$

Jeżeli przyjmiemy, że oś z_1 jest osią centralną, oznaczoną przez z_C , czyli osią przechodzącą przez środek ciężkości, to moment statyczny $S_{z_1} = S_{z_C} = 0$. Jeśli ponadto przyjmiemy, że oś z_2 jest dowolną osią poziomą oznaczoną jako z , to z powyższego równania otrzymamy

$$I_z = I_{z_C} + e_y^2 A \quad (8)$$

Równanie powyższe jest twierdzeniem Steinera przedstawiającym zależność między momentem bezwładności liczonym względem osi centralnej i momentem względem innej, dowolnej osi do niej równoległej. Dzięki twierdzeniu można wyznaczyć moment bezwładności przekroju względem osi centralnej, jeżeli znany jest moment względem innej dowolnej osi oraz odległość między osiami. Ponadto z twierdzenia widać, że moment bezwładności przyjmuje wartość najmniejszą, jeśli liczony jest względem osi centralnej.

Spróbujmy zastosować twierdzenie Steinera do wyznaczenia momentu bezwładności przekroju prostokątnego z Rys. 6 względem osi centralnej z_C . Wcześniej wyznaczyliśmy moment względem osi z . Odległość e_y między tą osią a osią centralną jest równa $h/2$. Pole figury A jest równe bh . Zgodnie z twierdzeniem będziemy mieli

$$I_{z_C} = I_z - e_y^2 A = \frac{bh^3}{3} - \left(\frac{h}{2}\right)^2 bh = \frac{bh^3}{12}.$$

Taki sam wynik otrzymamy, jeśli dla prostokąta z Rys. 6 moment bezwładności względem osi centralnej wyznaczymy z definicji momentu. Granice całkowania będą się wtedy zmieniały od $-h/2$ do $h/2$.

Twierdzenie Steinera pozwoli nam teraz dokończyć zadanie z Rys. 5. Wcześniej wyznaczyliśmy moment bezwładności względem osi z , znamy też pole powierzchni figury oraz odległość między osiami. Mamy zatem

$$I_{z_C} = I_z - e_y^2 A = 5,14b^4 - (0,45b)^2 \cdot 4,61b^2 = 4,21b^4.$$

Uwagi o momentach bezwładności

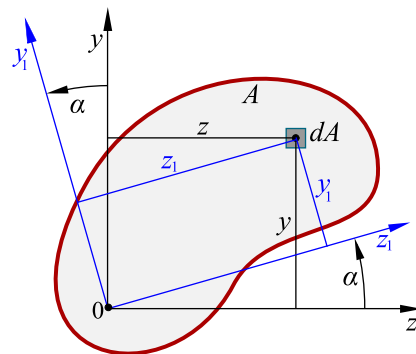
Podsumowując, można wyróżnić trzy typy osi:

- osie centralne – osie przechodzące przez środek ciężkości przekroju
- osie główne – osie, dla których moment odśrodkowy jest równy zero
- osie główne centralne – osie przechodzące przez środek ciężkości przekroju, dla których moment odśrodkowy jest równy zero

Wartości momentów bezwładności zależą od położenia początku układu współrzędnych. Zmieniają się one również przy obrocie tych osi (Rys. 8). Z praktycznego punktu widzenia najważniejsze są osie główne centralne, ponieważ względem nich moment bezwładności przyjmuje wartość największą i najmniejszą. Ma to znaczenie w zagadnieniach zginania belek, ponieważ od wartości momentu bezwładności zależy sztywność belki oraz wartość naprężeń maksymalnych.

Kąt obrotu określający położenie osi głównych wyznaczamy z zależności:

$$\tan 2\alpha = \frac{2I_{zy}}{I_y - I_z},$$



Rys. 8: Zmiana momentów bezwładności przy obrocie osi

natomiast ekstremalne wartości momentów bezwładności wynoszą

$$I_{ext} = \frac{I_z + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2}\right)^2 + I_{zy}^2},$$

odpowiednio wstawiając znak $+$ dla momentu największego I_{max} i znak $-$ dla momentu najmniejszego I_{min} .

Dobierając przekrój poprzeczny elementu konstrukcyjnego należy starać się zwiększać jego moment bezwładności. Analizując definicję momentu można to osiągnąć odsuwając jak największą ilość materiału jak najdalej od środka ciężkości lub od wybranej osi. Efekt ten widać na Rys. 1, gdzie w każdym kolejnym przekroju coraz więcej materiału odsuwane jest od osi poziomej, co skutkuje usztywnianiem belki.

Literatura

1. Gorškov A.G., Trošin V.H., Šalašin V.I. *Soprotivlenie materialov*, FIZMATLIT, Moskwa, 2005