

# Mechanika i wytrzymałość materiałów

## Wstęp

dr hab. inż. Paweł JASION

e-mail: `pawel.jasion@put.poznan.pl`

www: `pawel.jasion.pracownik.put.poznan.pl`

Politechnika Poznańska  
Instytut Mechaniki Stosowanej  
Zakład Wytrzymałości Materiałów i Konstrukcji

## Konsultacje

- poniedziałek, 11:15-12:00; wtorek, 11:15-12:00
- pokój: MC404 (kampus Piotrowo)

## Organizacja przedmiotu

- wykład: 30 godzin
- ćwiczenia: 30 godzin
- laboratorium: 15 godzin

## Zaliczenie przedmiotu

- wykład: dwa kolokwia
- ćwiczenia: dwa kolokwia
- laboratorium: wejściówki i raporty

- mechanika techniczna
- zachowanie się materiału pod obciążeniem
- zasady projektowania konstrukcji
- rozciągania i ściskanie prętów i układów prętowych
- ścinanie techniczne
- skręcania – projektowanie wałów
- zginanie – projektowanie belek
- stateczność prętów
- wytrzymałość zmęczeniowa

- 1 Dylał Z., Jakubowicz A., Orłoś Z. *Wytrzymałość materiałów. Tom I*, WNT, Warszawa, 2013
- 2 Gere JM., Goodno BJ. *Mechanics of materials*, Cengage Learning, Australia, 2009
- 3 Ostwald M. *Podstawy wytrzymałości materiałów i konstrukcji*, WPP, Poznań, 2017
- 4 Ostwald M. *Wytrzymałość materiałów i konstrukcji – zbiór zadań*, WPP, Poznań, 2018
- 5 Hibbeler RC. *Statics and Mechanics of materials (5th ed.)*, Pearson, Boston, 2016
- 6 Siuta W. *Mechanika techniczna*, WSiP, Warszawa, 1999
- 7 Joniak S. (red.) *Badania eksperymentalne w wytrzymałości materiałów*, WPP, Poznań, 2006.

- 1 Informacje wprowadzające
  - Czym jest wytrzymałość materiałów?
  - Wytrzymałość materiałów w procesie projektowym
  - Jakiej wiedzy potrzebujemy?
- 2 Podstawowa wiedza z mechaniki
  - Zasady i pojęcia
  - Skalary i wektory
  - Moment siły
- 3 Równowaga ciała sztywnego
  - Warunki równowagi
  - Przykłady

# Contents

- 1 **Informacje wprowadzające**
  - Czym jest wytrzymałość materiałów?
  - Wytrzymałość materiałów w procesie projektowym
  - Jakiej wiedzy potrzebujemy?
- 2 **Podstawowa wiedza z mechaniki**
  - Zasady i pojęcia
  - Skalary i wektory
  - Moment siły
- 3 **Równowaga ciała sztywnego**
  - Warunki równowagi
  - Przykłady

# Tytuł przedmiotu

Tradycyjny tytuł przedmiotu:

- wytrzymałość materiałów,

co sugeruje:

- zajmowanie się analizą obciążeń prowadzących do zniszczenia materiału.

Tytuł oddający istotę przedmiotu:

- statyka odkształcalnych ciał sprężystych

**Interesuje nas zatem:**

badanie zachowania się konstrukcji poddanej obciążeniom, które to zachowanie zależy między innymi od materiału

# Tytuł przedmiotu

Pochodzenie tytułu:

- z języka francuskiego (XIX wiek):  
*résistance de matériaux*

Tytuł w wersji angielskiej:

- *Strength of materials* lub *Mechanics of materials*



Siméon Poisson



Adhémar Jean Claude Barré  
de Saint-Venant



Claude-Louis Navier



# Historia przedmiotu

Więcej informacji o powstawaniu i rozwoju wytrzymałości materiałów można znaleźć w:



**Timoshenko, S.P.**

**History of Strength of Materials**

*Dover Publications, Inc., New York, 1983*



**Kurrer, K.E.**

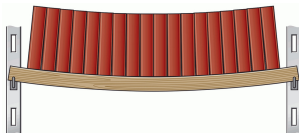
**The History of the Theory of Structures**

*Ernst & Sohn, Berlin, 2008*

# Do czego przydaje się wytrzymałość materiałów?

## Problem

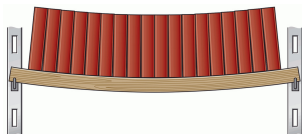
Moja półka ugina się zbyt mocno. Co zrobić, żeby zmniejszyć ugięcie? Jeśli będę znał czynniki wpływające na ugięcie będę wiedział co mogę zrobić.



# Do czego przydaje się wytrzymałość materiałów?

## Problem

Moja półka ugina się zbyt mocno. Co zrobić, żeby zmniejszyć ugięcie? Jeśli będę znał czynniki wpływające na ugięcie będę wiedział co mogę zrobić.



## Rozwiązanie: model matematyczny

$$v = \frac{5qL^4}{384EI}$$

# Do czego przydaje się wytrzymałość materiałów?

Wytrzymałość materiałów pozwala:

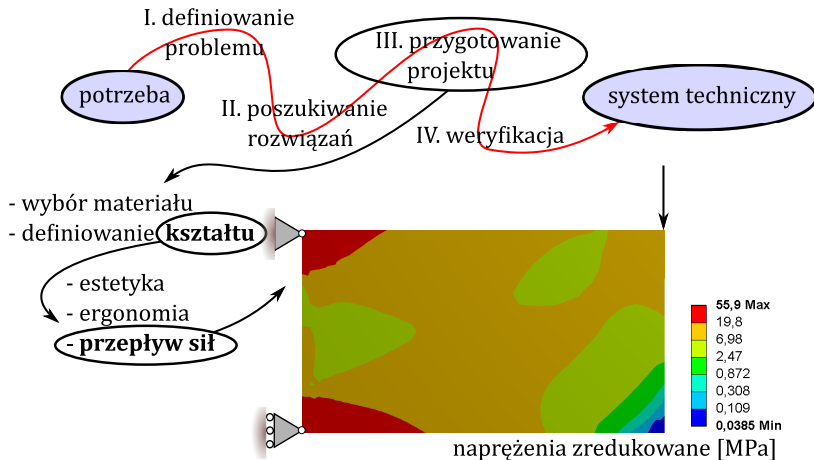
- projektować trwałe i efektywne konstrukcje w oparciu o modele matematyczne
- wyznaczać naprężenia i przemieszczenia w celu ulepszania istniejących konstrukcji
- rozumieć zachowanie się “konstrukcji” naturalnych



# Contents

- 1 Informacje wprowadzające**
  - Czym jest wytrzymałość materiałów?
  - **Wytrzymałość materiałów w procesie projektowym**
  - Jakiej wiedzy potrzebujemy?
- 2 Podstawowa wiedza z mechaniki**
  - Zasady i pojęcia
  - Skalary i wektory
  - Moment siły
- 3 Równowaga ciała sztywnego**
  - Warunki równowagi
  - Przykłady

# Wytrzymałość materiałów w procesie projektowym



# Kształtowanie elementów konstrukcyjnych

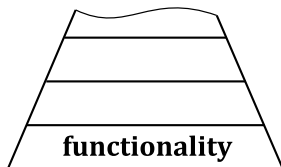
## Funkcjonalność

zdolność konstrukcji do spełniania swojej funkcji

Aby konstrukcja mogła spełniać swoją funkcję nie może:

- utracić spójności – *warunek wytrzymałości*

$$\sigma \leq \sigma_{dop}$$



# Kształtowanie elementów konstrukcyjnych

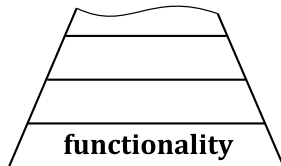
## Funkcjonalność

zdolność konstrukcji do spełniania swojej funkcji

Aby konstrukcja mogła spełniać swoją funkcję nie może:

- ulegać nadmiernej deformacji lub zmianie wymiarów –  
*warunek sztywności*

$$\delta \leq \delta_{dop}$$





# Kształtowanie elementów konstrukcyjnych

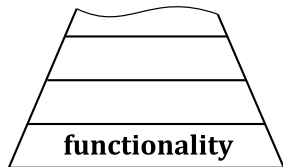
## Funkcjonalność

zdolność konstrukcji do spełniania swojej funkcji

Aby konstrukcja mogła spełniać swoją funkcję nie może:

- utracić stateczności – *warunek stateczności*

$$F \leq F_{cr}$$



# Kształtowanie elementów konstrukcyjnych

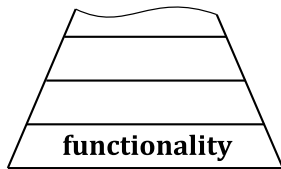
## Funkcjonalność

zdolność konstrukcji do spełniania swojej funkcji

Aby konstrukcja mogła spełniać swoją funkcję nie może:

- utracić spójności – *warunek wytrzymałości*
- ulegać nadmiernej deformacji lub zmianie wymiarów – *warunek sztywności*
- utracić stateczności – *warunek stateczności*

$$\left. \begin{array}{l} \sigma \leq \sigma_{dop} \\ \delta \leq \delta_{dop} \\ F \leq F_{cr} \end{array} \right\} = \text{funkcjonalność}$$



# Kształtowanie elementów konstrukcyjnych

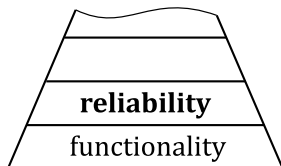
## Niezawodność

spełnianie funkcji przez określoną ilość czasu

Aby dodać czynnik czasu należy zrozumieć procesy działające w konstrukcji i w materiale w czasie użytkowania. Są nimi:

- obciążenie i podparcie
- wpływ środowiska
- procesy powierzchniowe

$$\left. \begin{array}{l} \sigma \leq \sigma_{dop} \\ \delta \leq \delta_{dop} \\ F \leq F_{cr} \end{array} \right\} + \text{time} = \text{niezawodność}$$



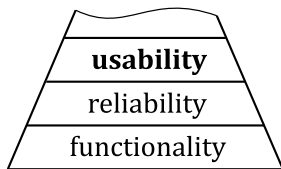
**Pamiętaj o najsłabszym ogniwie!**

# Kształtowanie elementów konstrukcyjnych

## Użyteczność

łatwość użytkowania produktu; *forgiving design*

$$\left. \begin{array}{l} \sigma \leq \sigma_{dop} \\ \delta \leq \delta_{dop} \\ F \leq F_{cr} \end{array} \right\} + \text{czas} + \text{ergonomia} = \text{użyteczność}$$



# Kształtowanie elementów konstrukcyjnych

Aby spełnić warunek użyteczności konstruktor musi

- przewidzieć sposób zniszczenia konstrukcji,
- przyjąć kryterium zniszczenia.

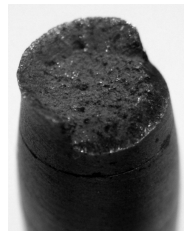
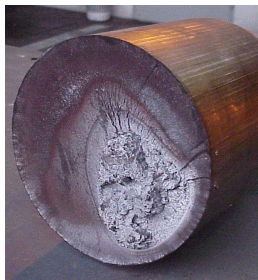
Aby przewidzieć sposób zniszczenia należy:

- przeprowadzić analizę stanu naprężeń,
- przeanalizować zachowanie się materiału pod obciążeniem,
- przyjąć sposób obciążenia konstrukcji.

# Możliwe sposoby zniszczenia konstrukcji

Zniszczenie poprzez utratę spójności może nastąpić w wyniku:

- nagłego pęknięcia materiału kruchego
- długotrwałego pęknięcia materiału (zmęczenie)
- nadmiernej deformacji plastycznej



# Możliwe sposoby zniszczenia konstrukcji

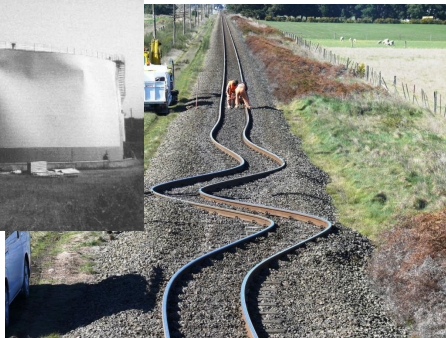
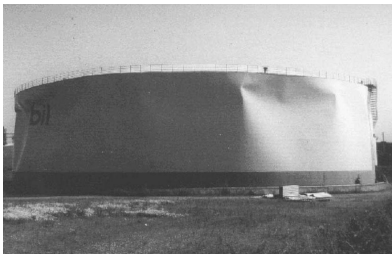
Zniszczenie poprzez nadmierną deformację może być skutkiem:

- zbyt dużego odkształcenia sprężystego
  - nadmiernie odkształcone elementy maszyn nie współpracują właściwie
- odkształcenia wywołanego pełzaniem
  - pełzanie – zwiększanie się odkształcenia w czasie przy stałym obciążeniu

# Możliwe sposoby zniszczenia konstrukcji

Zniszczenie poprzez utratę stateczności:

- elementy cienkościenne lub smukłe poddane obciążeniom ściskającym mogą ulec wyboczeniu



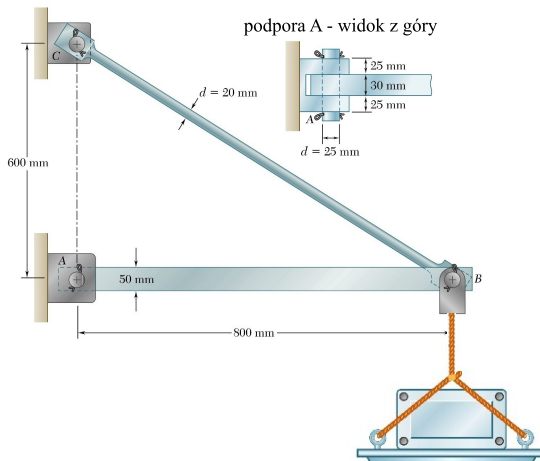


# Contents

- 1 Informacje wprowadzające**
  - Czym jest wytrzymałość materiałów?
  - Wytrzymałość materiałów w procesie projektowym
  - **Jakiej wiedzy potrzebujemy?**
- 2 Podstawowa wiedza z mechaniki**
  - Zasady i pojęcia
  - Skalary i wektory
  - Moment siły
- 3 Równowaga ciała sztywnego**
  - Warunki równowagi
  - Przykłady

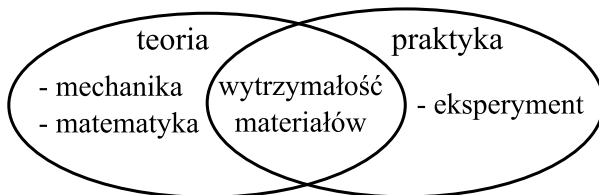
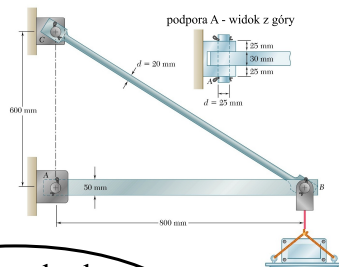
# Jakiej wiedzy potrzebujemy?

[Beer F.P. et al. 2012]



# Jakiej wiedzy potrzebujemy?

[Beer F.P. et al. 2012]



# Contents

- 1 Informacje wprowadzające
  - Czym jest wytrzymałość materiałów?
  - Wytrzymałość materiałów w procesie projektowym
  - Jakiej wiedzy potrzebujemy?
- 2 Podstawowa wiedza z mechaniki
  - **Zasady i pojęcia**
  - Skalary i wektory
  - Moment siły
- 3 Równowaga ciała sztywnego
  - Warunki równowagi
  - Przykłady

# Czym jest mechanika?

## Mechanika

dział fizyki opisujący stan spoczynku lub ruch ciał, będących pod działaniem sił

## Statyka

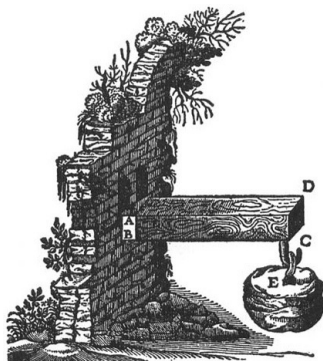
zajmuje się równowagą ciał; używana jest do określania sił działających na ciało bądź w ciele, które sprawiają, że ciało jest albo w równowadze albo porusza się ruchem jednostajnym

## Wytrzymałość materiałów

pozwała określić zależności między obciążeniem zewnętrznym a intensywnością sił wewnętrznych działających w ciele

# Historia

- starożytność: Archimedes
  - eksperymenty z oddziaływaniem sił
- wiek XVII: Galileusz
  - wpływ działania sił na belkę
- wiek XVIII: Saint-Venant, Poisson, Lamé, Navier
  - modele matematyczne



# Podstawowe wielkości i idealizacja

## Wielkości

- **długość** – określa położenie punktu (metr [m])
- **czas** – określa kolejność zdarzeń (sekunda [s])
- **masa** – mierzy ilość materii (kilogram [kg])
- **siła** – oddziaływanie na ciało, które powoduje jego ruch (Newton [N])

Powyższe wielkości są ze sobą powiązane drugą zasadą dynamiki Newtona. Można z niej wyprowadzić jednostkę siły [N].

$$N = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2}$$

# Podstawowe wielkości i idealizacja

## Idealizacje

- **punkt materialny** – posiada masę, ale jego rozmiar jest zanedbywalnie mały
- **ciało sztywne** – zbiór dużej liczby punktów materialnych, pozostających w niezmienniczej odległości od siebie nawzajem zarówno przed, jak i po obciążeniu
- **siła skupiona** – efekt obciążenia, które działa na punkt ciała



# Uwagi techniczne

## Spójność jednostek

$$d = \sqrt[3]{\frac{32M_z}{\pi\sigma_{dop}}} = \sqrt[3]{\frac{[\text{Nmm}]}{[\text{MPa}]}} = \sqrt[3]{\frac{[\text{Nmm}]}{\frac{[\text{N}]}{[\text{mm}^2]}}} = [\text{mm}]$$

## Cyfry znaczące

24500 – 5 cyfr znaczących ( $24,5 \times 10^3$ )

0,00325 – 3 cyfry znaczące ( $3,25 \times 10^{-3}$ )

## Zaokrąglanie liczb

0,3476  $\approx$  0,348

0,3473  $\approx$  0,347

# Contents

- 1 Informacje wprowadzające
  - Czym jest wytrzymałość materiałów?
  - Wytrzymałość materiałów w procesie projektowym
  - Jakiej wiedzy potrzebujemy?
- 2 Podstawowa wiedza z mechaniki
  - Zasady i pojęcia
  - **Skalary i wektory**
  - Moment siły
- 3 Równowaga ciała sztywnego
  - Warunki równowagi
  - Przykłady

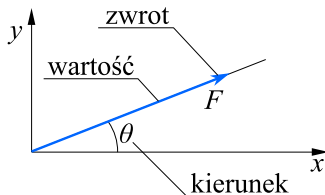
# Definicje

## Skalar

każda dodatnia lub ujemna wielkość fizyczna, która może być w pełni określona przez swoją wartość (długość, masa, czas)

## Wektor

każda wielkość fizyczna, której pełne określenie wymaga podania wartości, kierunku i zwrotu (siła, moment)

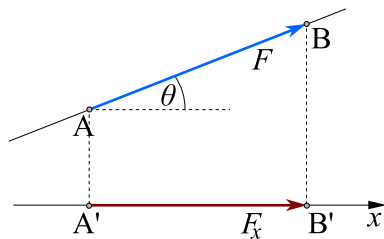


# Płaski układ sił

## Rzut siły na oś

Rzutem siły na dowolną oś nazywamy odcinek A'B', łączący rzut początku i końca danej siły na tę oś.

$$F_x = F \cos \theta$$



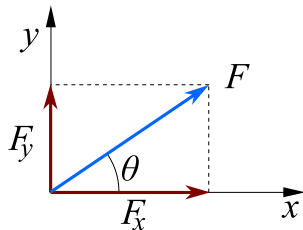
# Płaski układ sił

## Składowe prostokątne

Jeśli siłę rozłoży się na dwie składowe zgodne z osiami  $x$  and  $y$ , składowe te nazywamy **składowymi prostokątnymi**.

$$F_x = F \cos \theta$$

$$F_y = F \sin \theta$$



# Płaski układ sił

## Wypadkowa płaskiego układu sił

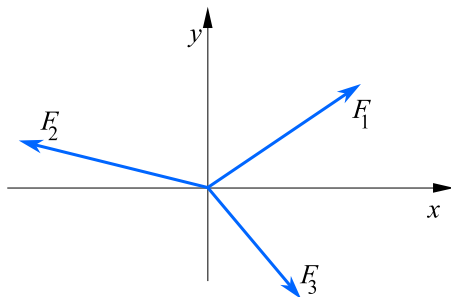
$$F_{Rx} = F_{1x} - F_{2x} + F_{3x}$$

$$F_{Ry} = F_{1y} + F_{2y} - F_{3y}$$

$$F_{Rx} = \sum_{i=1}^n F_{ix}$$

$$F_{Ry} = \sum_{i=1}^n F_{iy}$$

$$F_R = \sqrt{F_{Rx}^2 + F_{Ry}^2}$$



- pojedyncza siła wypadkowa oddziałuje na ciało tak samo jak wszystkie siły układu

# Płaski układ sił

Przykłady [Hibbeler, 2014]

Wyznaczyć składowe prostokątne oraz wartości i kierunki sił wypadkowych działających na śrubę oczkową przedstawioną na poniższych rysunkach

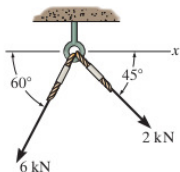


Fig. 1

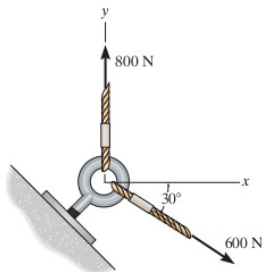


Fig. 2

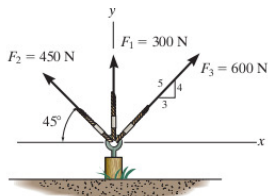


Fig. 3

# Contents

- 1 Informacje wprowadzające
  - Czym jest wytrzymałość materiałów?
  - Wytrzymałość materiałów w procesie projektowym
  - Jakiej wiedzy potrzebujemy?
- 2 Podstawowa wiedza z mechaniki
  - Zasady i pojęcia
  - Skalary i wektory
  - **Moment siły**
- 3 Równowaga ciała sztywnego
  - Warunki równowagi
  - Przykłady

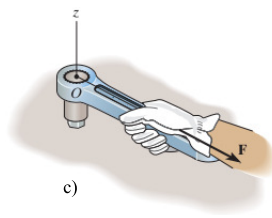
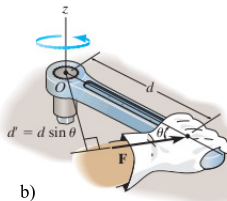
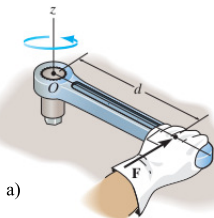


# Moment siły

Wartość momentu  $M_0$

$$M_0 = Fd$$

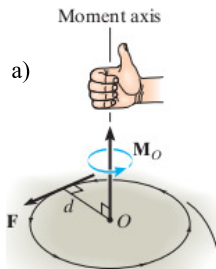
gdzie  $d$  jest **ramieniem momentu** lub **najkrótszą odległością** od osi w punkcie 0 do linii działania siły



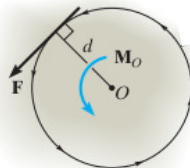
# Moment siły

## Kierunek momentu $M_0$

jest definiowany przez **oś momentu**, która jest prostopadła do płaszczyzny zawierającej siłę  $F$  i ramię momentu  $d$ .



b)

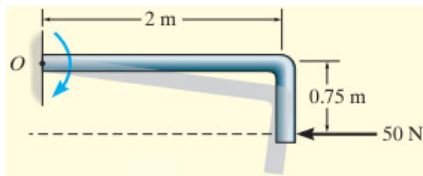


# Moment siły

Przykład [Hibbeler, 2014]

Wyznaczyć:

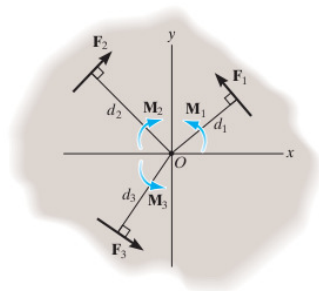
- moment  $M_0$  działający na punkt 0.



# Moment siły

## Moment wypadkowy

$$M_{R0} = F_1 d_1 - F_2 d_2 + F_3 d_3 \quad M_{R0} = \sum_{i=1}^n F_i d_i$$

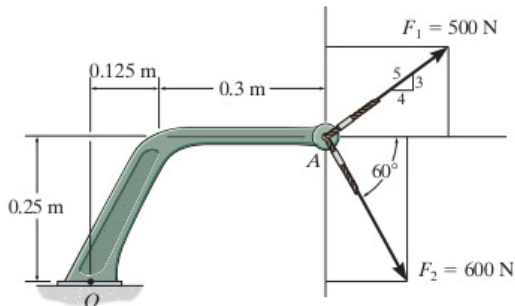


# Moment siły

Przykład [Hibbeler, 2014]

Wyznaczyć:

- moment wypadkowy działający w punkcie  $O$ , wywołany siłami  $F_1$  i  $F_2$ .

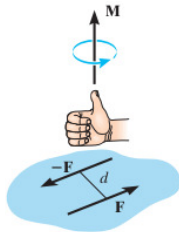
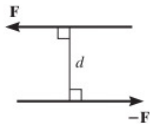


# Moment siły

## Moment pary sił

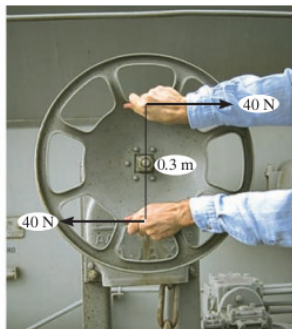
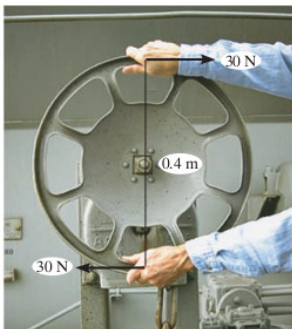
Parę sił definiuje się jako dwie równoległe siły, które mają tę samą wartość ale przeciwne zwroty i są oddalone od siebie o dystans  $d$  zwany ramieniem pary. Ponieważ wypadkowa sił jest równa zero, jedynym efektem ich działania jest obrót.

$$M = Fd$$



# Moment siły

## Pary równoważne



# Uproszczenia układów sił i momentów

- czasami wygodnie jest zredukować układ sił i momentów działających na ciało do prostszego, równoważnego układu układu sił składającego się z jednej siły i jednego momentu
- układ sił nazywamy równoważnym, jeśli efekt jego działania jest taki sam jak efekt działania układu wyjściowego



# Uproszczenia układów sił i momentów

- siła przyłożona do ciała sztywnego może być przesuwana wzdłuż swojej linii działania
- moment przyłożony do ciała sztywnego może być przesuwany w płaszczyźnie swojego działania
- dwie siły o takiej samej wartości i kierunku, ale o przeciwnych zwrotach dodane do ciała sztywnego nie zmieniają jego zachowania
- każdy układ sił i momentów może zostać zredukowany do siły wypadkowej i momentu wypadkowego działających w dowolnym punkcie

# Contents

- 1 Informacje wprowadzające
  - Czym jest wytrzymałość materiałów?
  - Wytrzymałość materiałów w procesie projektowym
  - Jakiej wiedzy potrzebujemy?
- 2 Podstawowa wiedza z mechaniki
  - Zasady i pojęcia
  - Skalary i wektory
  - Moment siły
- 3 Równowaga ciała sztywnego
  - Warunki równowagi
  - Przykłady

# Warunki równowagi ciała sztywnego

- siła wypadkowa i moment wypadkowy są równe zero
  - równania równowagi (płaski układ sił – dwa wymiary)

$$\sum F_x = 0; \quad \sum F_y = 0; \quad \sum M_0 = 0$$

or

$$\sum F_x = 0; \quad \sum M_A = 0; \quad \sum M_B = 0$$

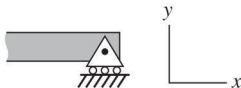
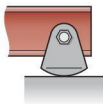
- rozważane ciało jest ciałem sztywnym – nie deformuje się po obciążeniu
- kierunki działania sił i ramiona momentów nie zmieniają się

# Uwalnianie układu od więzów (ang. *free-body diagram*)

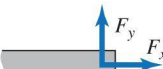
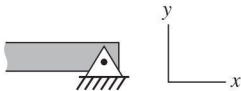
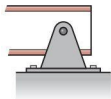
- zanim zapisze się równania równowagi wszystkie siły i momenty, znane i nieznane, działające na ciało muszą zostać określone
- aby określić jakie siły działają na układ, należy uwolnić ten układ od więzów
- układ uwolniony od więzów do ciało odizolowane od jego otoczenia
- reakcje – siły, które pojawiają się w podporach i punktach kontaktu między ciałami
  - jeśli podpora odbiera możliwość ruchu ciała w danym kierunku, to pojawia się reakcja działająca w tym właśnie kierunku
  - jeśli podpora blokuje obrót, pojawia się w tym punkcie moment działający na ciało

# Typy podpór

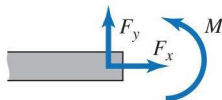
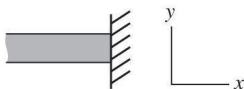
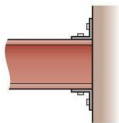
podpora przegubowa przesuwna



podpora przegubowa nieprzesuwna



utwierdzenie

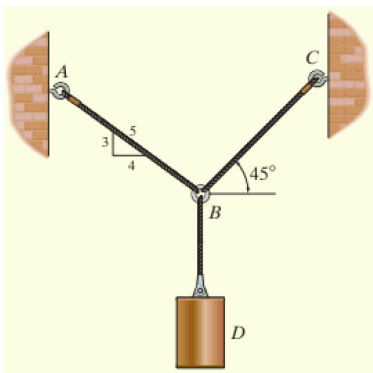


# Contents

- 1 Informacje wprowadzające
  - Czym jest wytrzymałość materiałów?
  - Wytrzymałość materiałów w procesie projektowym
  - Jakiej wiedzy potrzebujemy?
- 2 Podstawowa wiedza z mechaniki
  - Zasady i pojęcia
  - Skalary i wektory
  - Moment siły
- 3 **Równowaga ciała sztywnego**
  - Warunki równowagi
  - **Przykłady**

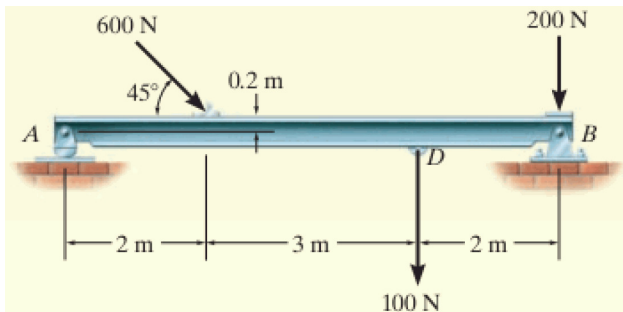
# Przykład 1 [Hibbeler, 2014]

Wyznaczyć siły rozciągające w prętach BA i BC pozwalające utrzymać walec D o masie 60 kilogramów.



# Przykład 2 [Hibbeler, 2014]

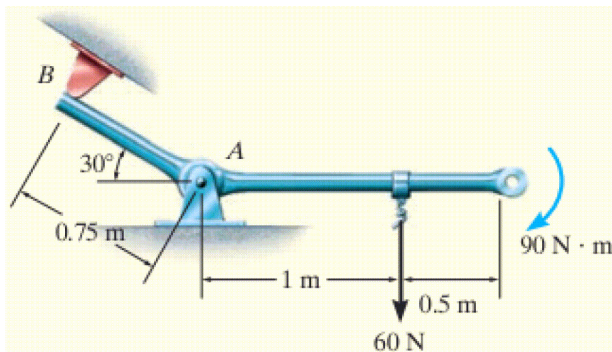
Wyznaczyć poziome i pionowe składowe reakcji wywołane podparą przegubową nieprzesuwną B i przegubową przesuwną A. Pominąć masę belki.





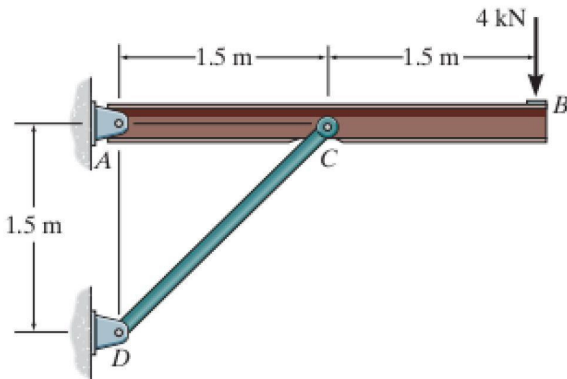
# Przykład 3 [Hibbeler, 2014]

Dźwignia podparta jest przegubowo w punkcie A i opiera się swobodnie na gładkiej podporze B. Wyznaczyć poziomą i pionową reakcję w punkcie A.



## Przykład 4 [Hibbeler, 2014]

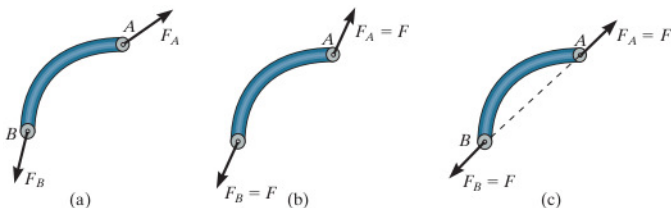
Wyznaczyć poziomą i pionową składową reakcji w punkcie A oraz reakcję działającą na belkę w punkcie C.



# Układy z dwiema i trzema siłami

## Element obciążony dwiema siłami

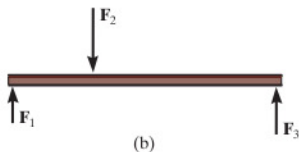
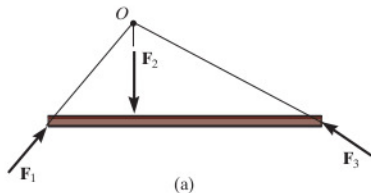
Dowolny element obciążony dwiema siłami pozostaje w równowadze, jeżeli siły te mają taką samą wartość, działają przeciwnych kierunkach i wzdłuż tego samego kierunku, wyznaczonego przez linię łączącą punkty przyłożenia sił.



# Układy z dwiema i trzema siłami

## Element obciążony trzema siłami

Równowaga momentów sił może być spełniona tylko, jeśli trzy siły tworzą zbieżny lub równoległy układ sił.



# Układy z dwiema i trzema siłami

Example [Hibbeler, 2014]

Dźwignia  $ABC$  podparta jest przegubowo nieprzesuwnie w punkcie  $A$  i połączona z elementem  $BD$ . Zakładają, że masa elementów jest zanedbywalnie mała, wyznaczyć siły w podporze  $A$ .

