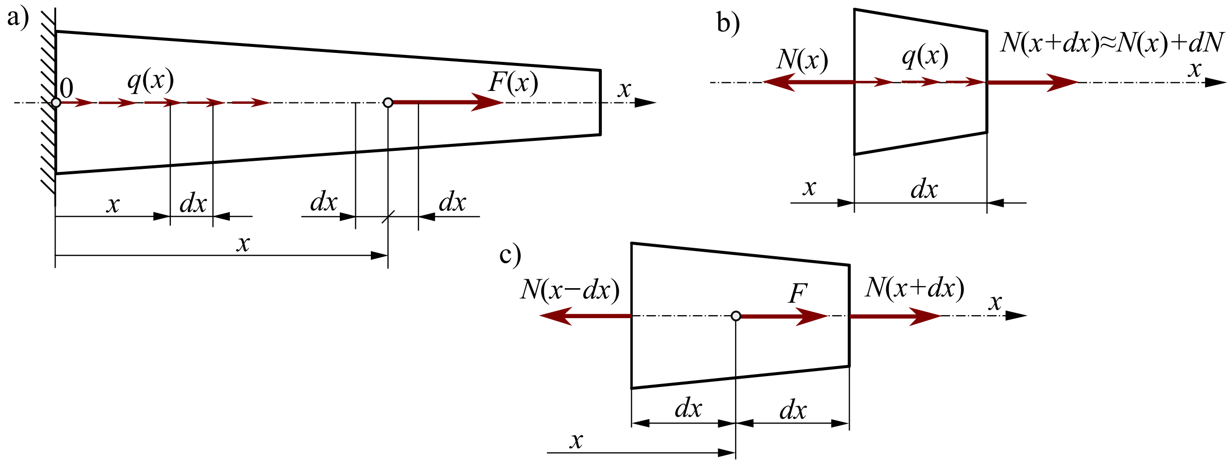
Rozciąganie i ściskanie prętów

Równowaga wyciętego fragmentu pręta

Jednym z prostych przypadków obciążenia jest osiowe rozciąganie lub ściskanie. Jest to taki stan obciążenia, przy którym oś pręta prosta przed obciążeniem pozostaje prosta po obciążeniu, a w pręcie pojawiają się jedynie siły osiowe. Możliwe są tu dwa typy obciążenia (Rys. 1a):

- siła przyłożona w punkcie F [N],
- intensywność obciążenia $q(x)$ [N/mm], która na działającym odcinku pręta może być stała lub zmienna; intensywność jest funkcją współrzędnej x.

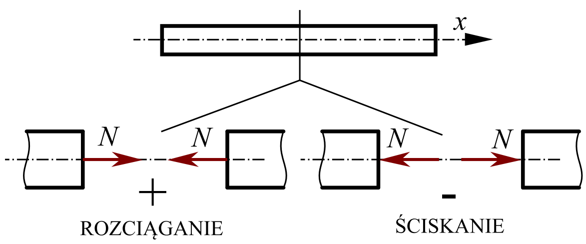


Rys. 1: Obciążenie pręta w stanie osiowego rozciągania

Przeanalizujmy, co dzieje się w nieskończenie małych fragmentach pręta wyciętego w miejscu działania wymienionych wyżej obciążeń. Zacznijmy od miejsca, gdzie przyłożona jest intensywność $q(x)$. Wytnijmy z pręta fragment o długości dx, zlokalizowany na współrzędnej x od początku układu współrzędnych, jak przedstawiono to na Rys. 1b. Zakładają, że dx jest wielkością nieskończenie małą można przyjąć, że rozkład obciążenia $q(x)$ jest stały na całym odcinku niezależnie od funkcji, według której się zmienia. Rozważania będą zatem prawdziwe dla dowolnej postaci intensywności obciążenia.

Szukamy zależności między obciążeniem a siłami wewnętrznymi. Ponieważ cały pręt jest w równowadze, wycięty przez nas fragment również musi pozostawać w równowadze. Zapiszmy zatem równanie równowagi sumy rzutów wszystkich sił na oś pręta. Zgodnie z zasadą przekroi myślowych, w miejscu przecięcia pręta wprowadzamy siły wewnętrzne. W przypadku osiowego rozciągania będą to tylko siły normalne N. Na lewym przekroju będzie to siła $N(x)$, ponieważ przekrój znajduje się w odległości x od początku układu współrzędnych. Na prawym przekroju, który jest dalej o dx będzie to siła $N(x + dx)$. Można przyjąć w przybliżeniu, że $N(x + dx) \approx N(x) + dN$, gdzie dN jest przyrostem funkcji N, jej różniczką, czyli jej zmianą wywołaną przyrostem zmiennej x.

Należy zwrócić uwagę na przyjęte kierunki sił wewnętrznych. Analizując konstrukcję zawsze przyjmuje się siły wewnętrzne jako dodatnie. W tym przypadku, zgodnie z przyjętą konwencją znaków, przedstawioną na Rys. 2, siły dodatnie to te, skierowane od przekroju na zewnątrz. Widać, że w zależności od tego, którą część pręta analizujemy, siła dodatnia może być zgodna lub przeciwna do dodatniego kierunku osi.



Rys. 2: Konwencja znaków

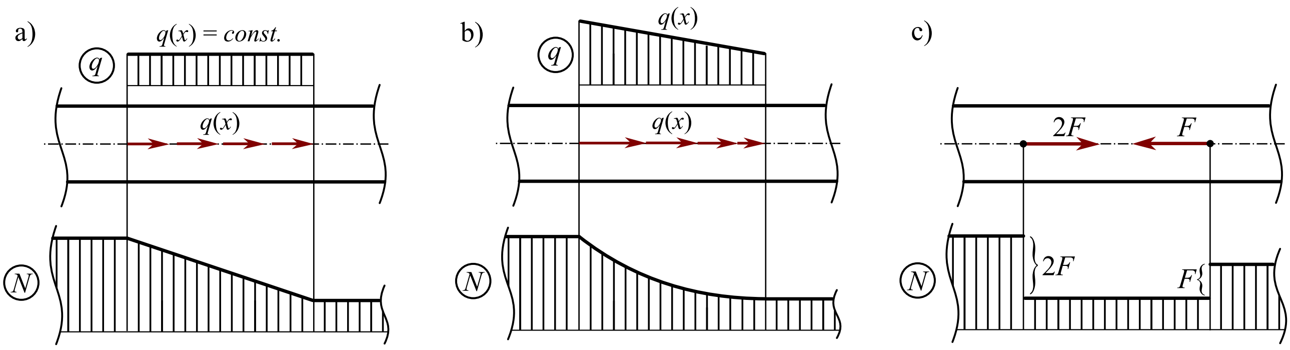
Możemy zatem przystąpić do zapisania równania równowagi. Ponieważ jest to równanie sił, intensywność $q(x)$ należy zapisać jako siłę. Intensywność działa na odcinku dx, zatem wywołana przez nią siłą N^q będzie iloczynem intensywności i długości na jakiej ona działa, czyli $N^q = q(x)dx$. Równanie ma zatem postać

$$\sum F = 0 \quad \rightarrow \quad -N(x) + q(x)dx + N(x) + dN = 0 \tag{1}$$

Z powyższego równania otrzymujemy zależność różniczkową dla osiowego rozciągania, która ma postać

$$q(x) = -\frac{dN}{dx} \tag{2}$$

Znak minus jest konsekwencją przyjęcia kierunku osi x w prawo oraz kierunku działania obciążenia $q(x)$, które jest tu zgodne z osią. Z zależność powyższej wynika, że jeśli intensywność jest funkcją ciągłą, taką też funkcją będzie siła wewnętrzna. Ponadto, jeśli intensywność jest funkcją stałą, nie zmienia się na długość, to siła wewnętrzna będzie się zmieniać liniowo. Podobnie, liniowa zmiana intensywności spowoduje powstanie siły wewnętrznej opisanej funkcją kwadratową, jak przedstawiono to na Rys. 3.



Rys. 3: Zmiany siły wewnętrznej N wywołane: a) intensywnością obciążenia o stałej wartości; b) intensywnością zmienną liniowo; c) siłą przyłożoną w punkcie

Równanie (2) możemy zapisać w postaci $dN = -q(x)dx$. Jeżeli intensywność działa na odcinku od $x = x_1$ do $x = x_2$, to całkując powyższą zależność w takich granicach otrzymamy siłę N_{1-2} wywołaną intensywnością $q(x)$ na zadanym odcinku

$$\int_{x_1}^{x_2} dN = \int_{x_1}^{x_2} q(x)dx \quad \rightarrow \quad N(x_2) - N(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} q(x)dx.$$

Ostatecznie możemy zapisać

$$N_{1-2} = \int_{x_1}^{x_2} q(x)dx. \tag{3}$$

Drugim obciążeniem, jakie może działać na pręt w stanie osiowego rozciągania jest siła skupiona F. Podobnie jak w przypadku intensywności, sprawdzimy jak zmienia się siła wewnętrzna w pręcie w miejscu przyłożenia takiego obciążenia. Siła F przyłożona jest w odległości x od początku układu współrzędnych. Wytnijmy zatem fragment pręta w otoczeniu siły skupionej dla współrzędnej przed punktem przyłożenia siły $(x - dx)$ oraz za punktem przyłożenia siły $(x + dx)$, zgodnie z Rys. 1c. Siły wewnętrzne na przekrojach będą zatem równe $N(x - dx)$ na lewym przekroju i $N(x + dx)$ na prawym. Równanie równowagi ma postać

$$\sum F = 0 \quad \rightarrow \quad -N(x - dx) + F + N(x + dx) = 0. \tag{4}$$

Zapiszmy powyższe równanie w postaci, która pozwoli określić jaka jest zależność miedzy siła wewnętrzną występującą po lewej i po prawej stronie punku przyłożenia siły F. Mamy zatem

$$N(x+dx) = N(x-dx) - F. \tag{5}$$

Pamiętając, że wielkość dx dąży do zera widać, że siła wewnętrzna po prawej stronie punktu przyłożenia siły F jest równa sile po lewej stronie, pomniejszonej o wartość siły F. Zatem siła wewnętrzna zmienia się skokowo w miejscu przyłożenia siły skupionej, a uskok ten jest równy przyłożonej sile. Przykładowy wykres przedstawiono na Rys. 3c.

Zgodnie z zasadą przekroi myślowych siła wewnętrzna na przekroju jest równa sumie wszystkich sił przyłożonych do pozostawionego fragmentu pręta – równoważy je. W przypadku osiowego rozciągania i ściskania sumuje się wszystkie siły skupione i intensywności

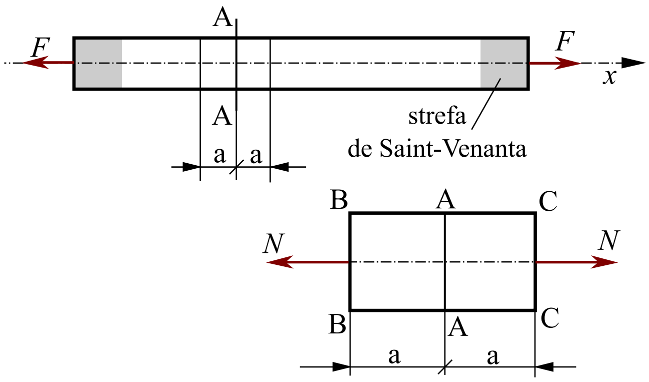
$$N(x) = \sum_{i=1}^{n} F_i + \int_{l_i} q(x)dx. \tag{6}$$

W przypadku, gdy na pręt działają tylko siły skupione, człon całkowy powyższego równania nie jest brany pod uwagę.

Zależności geometryczne

Rozpatrzymy teraz deformację pręta, aby znaleźć opisujące ją zależności geometryczne. Analizować będziemy pręt pryzmatyczny, to znaczy taki, który obciążony jest siłami na obu końcach, a jego przekrój poprzeczny jest taki sam w każdym miejscu, jak na Rys. 4. W pręcie takim, w każdym przekroju, i w każdym punkcie tego przekroju, siła wewnętrzna jest taka sama.

Wybierzmy dowolny przekrój A-A, położony z dala od strefy de Saint-Venant'a. Załóżmy ponadto, że w przypadku osiowego rozciągania lub ściskania oś pręta pozostaje prosta. Przed odkształceniem przekrój A-A jest płaski i prostopadły do osi pręta. Ponieważ otoczenie tego przekroju jest symetryczne, przekroje B-B i C-C są takie same jak przekrój A-A a siła wewnętrzna N po obu stronach jest taka sama, to po odkształceniu przekrój A-A musi pozostać płaski i prostopadły do osi.



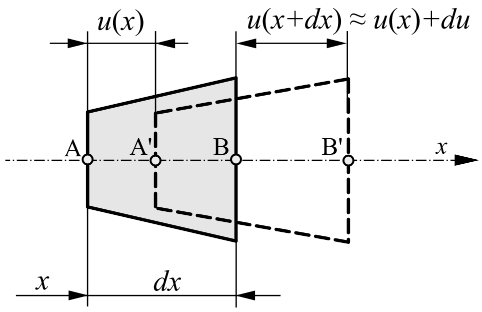
Rys. 4: Hipoteza płaskich przekroi

Jeżeli pręt nie jest pryzmatyczny przekrój poprzeczny po odkształceniu nie będzie płaski. Jednak pamiętając, że w wytrzymałości materiałów przyjmuje się założenie małych odkształceń, dla uproszczenia analizy wprowadza się hipotezę płaskich przekroi zwaną hipotezą Mariotta-Bernoulliego (1694):

> *Przy rozciąganiu i ściskaniu pręta, jego przekroje poprzeczne, płaskie przed odkształceniem, po odkształceniu pozostają płaskie i normalne do osi pręta.*

Mając na uwadze hipotezę płaskich przekroi rozpatrzmy deformację elementarnego wycinka pręta o długości dx. Pod wpływem obciążenia wycinek ten przemieści się i ulegnie deformacji, co oznacza, że jego poszczególne punkty przemieszczą się o różne wartości, zgodnie z Rys. 5 – punk A na lewym końcu przemieści się do punku A', a punkt B na prawym końcu przemieści się do punku B'. Ponieważ wartość dx jest nieskończenie mała, można przyjąć, że deformacja jest jednorodna.

Oznaczmy przemieszczenie punku A jako $u(x)$, a funkcję $u = u(x)$ nazwijmy funkcją przemieszczeń. Przemieszczenie to jest dodatnie, ponieważ punkt przemieszcza się zgodnie z osią x. Gdyby wycięty element pręta był ciałem sztywnym, każdy jego punkt przemieścił by się o taką samą odległość. Mielibyśmy do czynienia z ruchem ciała sztywnego. Ponieważ jednak pręt jest odkształcalny, jego wycinek ulegnie deformacji a punkt B przemieści się o inną wartość niż punkt A. Przemieszczenie to będzie funkcją współrzędnej punktu, zatem punk B przemieści się o $u(x + dx)$, co w przybliżeniu możemy zapisać jako $u(x) + du$.



Rys. 5: Deformacja pręta

Spróbujmy znaleźć zależność między przemieszczeniem punku pręta, a odkształceniem w kierunku osi x, czyli ε_x. Z definicji odkształcenia wiemy, że jest to stosunek zmiany długości pręta do jego długości początkowej. W naszym przypadku długość początkowa wycinka jest równa dx. Zmianę jego długości oznaczymy przez Δdx. Wartość tą możemy odczytać z Rys. 5. Będzie ona równa różnicy przemieszczenia końca wycinka i przemieszczenia jego początku, czyli $\Delta dx = (u(x) + du) - u(x)$. Możemy zatem zapisać

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta dx}{dx} = \frac{u(x) + du - u(x)}{dx}.$$

Ostatecznie otrzymujemy

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx}. \tag{7}$$

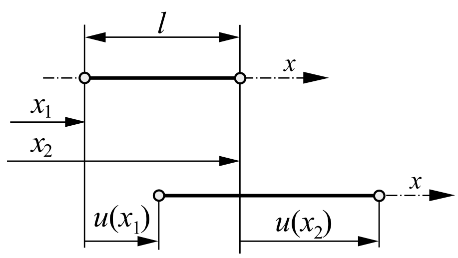
Jest to geometryczne równanie różniczkowe, które jest jednym z podstawowych równań w wytrzymałości materiałów.

W odróżnieniu od funkcji $N(x)$, która przy obciążeniach skupionych nie jest funkcją ciągłą, funkcja $u(x)$ zawsze jest ciągła. Brak ciągłości funkcji przemieszczeń oznaczał by brak ciągłości konstrukcji, czyli jej przerwanie. Korzystając z faktu, że funkcja przemieszczeń jest ciągła, znajdźmy zależność między zmianą długości pręta Δl i odkształceniem ε_x. Rozpatrzmy przemieszczenie fragmentu pręta o długości l zdefiniowanego współrzędnymi x_1 i x_2, zgodnie z Rys. 6.

Z zależności (7) mamy $du = \varepsilon_x dx$, co po scałkowaniu w granicach wyznaczonych przez przyjęte współrzędne da nam

$$\int_{x_1}^{x_2} du = \int_{x_1}^{x_2} \varepsilon_x dx \quad \rightarrow \quad u(x_2) - u(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} \varepsilon_x dx$$

Lewa strona powyższego równania, czyli różnica przemieszczeń końca pręta i jego początku to nic innego jak zmiana jego długości Δl. Mamy zatem



Rys. 6: Deformacja pręta

$$\Delta l = \int_{x_1}^{x_2} \varepsilon_x dx \tag{8}$$

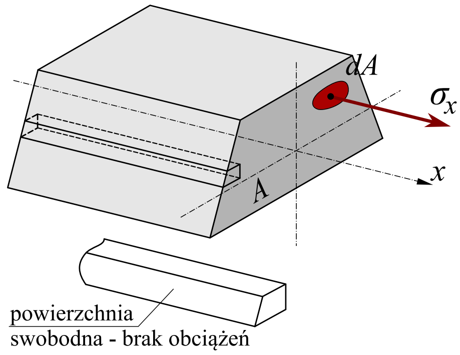
Jeśli zauważymy, że wyrażenie podcałkowe to Δdx, to możemy powiedzieć, że wydłużenie pręta jest sumą wydłużeń jego elementarnych odcinków dx.

Związki fizyczne

Przedstawione powyżej związki nie są zależne od materiału ani przekroju poprzecznego. Spróbujmy powiązać teraz odkształcenie wywołane obciążeniem rozciągającym z właściwościami mechanicznymi materiału.

Hipoteza płaskich przekroi zakłada, że każdy z przekroi pręta w czasie odkształcania przemieszcza się jako całość pozostając płaskim. Oznacza to, że każde włókno materiału wydłuża się o taką samą wartość, a to z kolei oznacza, że odkształcenie w każdym punkcie przekroju jest takie samo $\varepsilon_x = const.$

Rozpatrzmy, co dzieje się na powierzchniach bocznych włókna materiału zlokalizowanego przy ściance pręta, przedstawionego na Rys. 7. Na powierzchni swobodnej, z założenia, naprężenia nie występują. Zatem, aby spełnione było założenie równomierności odkształceń, na ściance przeciwnej również nie może być naprężeń. W podobny sposób dochodzimy do tego, że na pozostałych ściankach włókna naprężenia również nie występują. Jeżeli jest tak na jednym włóknie, to aby przekrój nie deformował się, to samo musi dziać się na każdym innym włóknie materiału pręta. Oznacza to, że włókna nie oddziałują między sobą, a jednorodna deformacja przekroju pojawia się zawsze, niezależnie od kształtu czy rozmiaru przekroju poprzecznego. Zatem, przy założeniu jednorodności materiału $E = const.$ możemy przyjąć, że w każdym pręcie osiowo rozciąganym lub ściskanym naprężenia są takie same w każdym punkcie każdego przekroju, i jest równe $\sigma = E\varepsilon_x = const.$



Rys. 7: Związki fizyczne

Na koniec zauważmy, że elementarna siła działająca na przekroju pręta jest równa naprężeniom normalnym rozłożonym na elementarnym polu dA, pomnożonym przez to pole, czyli $dN = \sigma dA$. Sumując siły elementarne na całym przekroju otrzymamy

$$N = \int_A \sigma dA.$$

Ponieważ naprężenia są stałe możemy zapisać

$$N = \sigma \int_A dA.$$

Całka w powyższym równaniu to pole przekroju poprzecznego. Mamy zatem

$$N = \sigma A \quad \rightarrow \quad \sigma = \frac{N}{A}. \tag{9}$$

Otrzymaliśmy zależność fizyczną, która pozwala na wyznaczenie naprężeń w pręcie pryzmatycznym rozciąganym lub ściskanym. W pręcie takim siła wewnętrzna N równa jest przyłożonemu obciążeniu F.

Literatura

1. Brzoska Z. *Wytrzymałość materiałów*, PWN, Warszawa, 1983

2. Gorškov A.G., Trošin V.H., Šalašin V.I. *Soprotivlenie materialov*, FIZMATLIT, Mockva, 2005